# بی‌نهایت

نشریه دانشجویی بی‌نهایت | مسلسل سیزدهم | تابستان ۱۴۰۲

# انتقام فیثاغورث

در این شماره می‌خوانید:

چرا ریاضی یک هنر است، نه یک علم

دنیای بی‌حد و مرز دستگاه‌های اعداد

چگونه سری‌های نامتناهی وحدت ریاضیات را آشکار می‌کنند

گفت‌وگویی با دکتر خسرو منصف‌شکری

الی ∞

000001

به نام خدا

# بی‌نهایت


**نشریهٔ دانشجویی بی‌نهایت / مسلسل سیزدهم / تابستان ۱۴۰۲**

**صاحب امتیاز:**
انجمن علمی دانشجویی ریاضی

**مدیر مسئول:**
دکتر محرم نژاد ایردموسی

**سردبیر:**
مریم خلج

**همکاران این شماره:**
مهدیه آزادحسن‌باروق، مائده بادان‌فیروز، شقایق باقری
مونس تابان‌رو، شقایق دیانت‌شعار، درسا سماوی
زهرا شیخ‌علی‌ملیانی، زهرا صمدی، زهرا ورمزیاری
علیرضا هاشم‌پورمحمدآبادی

**ویراستاران:**
مهدیس امامی، مائده بادان‌فیروز، مونس تابان‌رو
شقایق دیانت‌شعار، مهدیس فتحی‌اول

**طراح جلد:**
سید علی میرباقری

**با تشکر ویژه از:**
دکتر خسرو منصف‌شکری

- زیر نظر کمیتهٔ ناظر بر نشریات دانشگاه -


## در این شماره میخوانید




با انجمن علمی ریاضی در ارتباط باشید:

@mathsbu

@math.sbu

MathSBU.InfinityMagazine@gmail.com

# سرمقاله

ممکن است چیزی به نام سرنوشت یا جبر یا اختیار یا علاقه یا انتخاب یا تصادف باعث شده باشد تا در جامعهٔ ریاضی‌خوان‌ها قرار گیریم. اینکه باور کنیم کدام‌یک عامل این اتفاق بوده، فرقی ندارد. مهم آن است که بدانیم اگر قرار است این مسیر را تا انتها طی کنیم، چگونه از آن لذت ببریم و در انتهای راه، وقتی به مسیر پشت سر نگاه می‌کنیم، از چیزی پشیمان نباشیم.

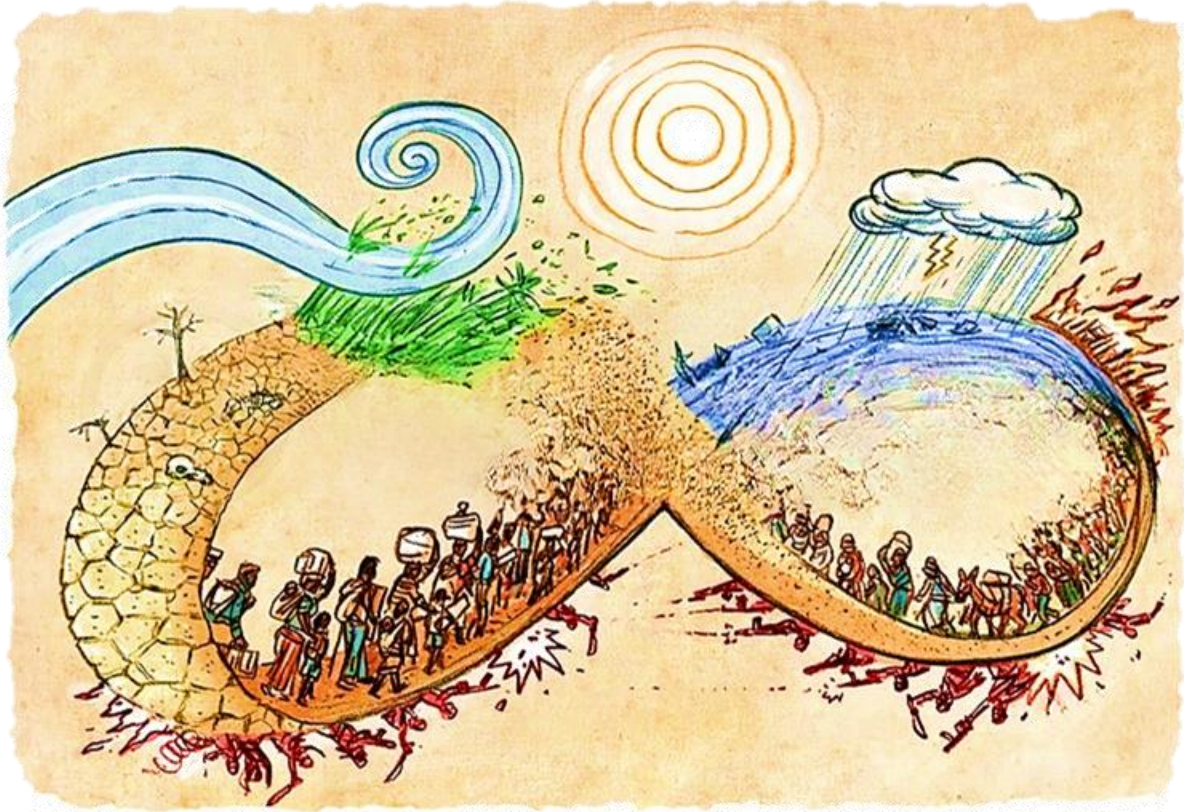
بی‌نهایت با عشق آماده شده و آمده است تا قطره‌ای لذت از دریای بی‌کران ریاضی را به دانشجویان و خوانندگانش بچشاند، فارغ از اینکه چرا در این مسیر قرار گرفته‌اند یا تا چه اندازه از ریاضی بیزار یا بدان علاقه‌مندند.

بی‌نهایت خواستار تغییری هرچند کوچک در روند تحصیلی تک‌تک ماست تا بلکه مسیر پیش‌رو هموارتر و دلپذیرتر شود.

چه از ریاضی متنفر باشید، چه بدان عشق بورزید، چه علاقهٔ خود را به‌سبب اشتباه دیگران از دست داده باشید، به بی‌نهایت فرصت دهید، حتی اگر چند صفحه. شاید شما نیز با دیدن اثباتی، خواندن سرگذشتی یا کشف کاربردی از ریاضی در زندگی روزمره بتوانید زمینهٔ مورد علاقهٔ خود را پیدا کنید و برای لحظه‌ای هرچند ناپایدار و زودگذر، از بودن در مسیر ریاضی احساس غرور کنید.

امید است هرکس به فراخور علاقهٔ خود بتواند دقایقی را با بی‌نهایت بگذراند.

# هتل بی‌نهایت



Peter Kuper


# گفت‌وگویی با دکتر خسرو منصف‌شکری

**مصاحبه‌گران: مهدیه آزادحسن‌باروق**
**علیرضا هاشم‌پورمحمدآبادی**
دانشجویان کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهید بهشتی

دکتر خسرو منصف‌شکری عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی است. او کارشناسی و کارشناسی ارشد را در دانشگاه صنعتی شریف و دکتری را در مؤسسهٔ ماکس پلانک[1] در شهر بن آلمان گذرانده است. پیش از دفاع از پایان‌نامهٔ ارشد خود، در یک دورهٔ یک‌سالهٔ تحصیلات تکمیلی در مرکز بین‌المللی فیزیک نظری عبدالسلام[2] واقع در ایتالیا شرکت کرده است. پس از اتمام دورهٔ دکتری به سرپرستی پروفسور دون زاگیر[3]، برای فرصت مطالعاتی به مؤسسهٔ ملی ریاضیات محض و کاربردی[4] واقع در برزیل رفته است. در اینجا گفت‌وگوی انجمن علمی - دانشجویی ریاضی دانشگاه شهید بهشتی را با ایشان می‌خوانید.

### ۱. چرا ریاضی را به‌عنوان رشتهٔ خود انتخاب کردید؟

ببینید، مسائلی هست که بستگی به ویژگی‌های شخصیتی فرد دارد، بخشی از دلیل اینکه من ریاضی را انتخاب کردم شخصی است، ولی بخش قابل بیان آن، این است که آدم در زمان بچگی کنجکاوی‌هایی دارد و سعی می‌کند که دنبال کنجکاوی‌هایش برود. در آن سنین پایین، ریاضی یکی از همان جاهایی است که پاسخی برای این کنجکاوی‌ها پیدا می‌شود. اما در همان سنین، پیگیری موارد دیگر کمی سخت است و نیاز است تا سن آدم کمی بیشتر شود.

البته مواقعی هم هست که مجموعه اتفاقاتی فرد را به‌سمت پیگیری آن کنجکاوی‌ها سوق می‌دهد. مثلاً یکی از آن اتفاق‌ها به زمانی مربوط است که من از دبستان به مدرسهٔ تیزهوشان رفتم. سال‌های اول راهنمایی یک سری جزوه‌های اضافی می‌دادند که مثلاً با نظریهٔ مجموعه‌ها شروع می‌شد، سپس مقدمات نظریهٔ اعداد و بعد هندسه.

مسائل جزوه بسیار سخت بود، خصوصاً من در سال اول راهنمایی، ریاضی خوبی نداشتم. با فرا رسیدن تابستان به ریاضی پرداختم. به‌طور خلاصه، بخشی از انتخاب ریاضی به‌خاطر سختی رفتن من به مدرسهٔ تیزهوشان نیز بود، چون من انگیزه پیدا کردم ریاضی بخوانم. همچنین سال دوم راهنمایی دبیری داشتم که خیلی دبیر خوبی بود. حضور او باعث شد که من در پرداختن به ریاضی علاقه‌مندتر شوم. درحقیقت پیش از آشنایی با ایشان، در خواندن ریاضی اجبار و الزامی وجود داشت که حال با علاقه همراه شده بود.

بعدتر در درس‌های سال دوم و سوم راهنمایی و مقاطع بالاتر، برادرم هم بسیار کمکم کرد، مثلاً در تابستانی که سوم راهنمایی را تمام

کردم، برادرم به‌طور فشرده همهٔ دروس دبیرستان را تا سال چهارم به من درس داد، همان نیز موتور انگیزه‌ام بود. به همین دلایل، از یک جایی به بعد، دوست داشتم بیشتر ریاضی بخوانم. در دورهٔ دبیرستان به‌جز ریاضی و فوتبال به چیز دیگری نمی‌پرداختم.

### ۲. بر چه بخش یا بخش‌هایی از ریاضیات تمرکز دارید؟ دربارهٔ دستاوردهای خود در آن زمینه‌ها توضیح می‌دهید؟

تمرکزی در هیچ زمینه‌ای از ریاضیات ندارم، چون دیدگاه کنونی‌ام این‌طور نیست که تخصصی باشد. اما آن بخشی که از ابتدا به آن علاقه‌مند شدم و ادامه دادم نظریهٔ اعداد بود. هرچه بیشتر پیش رفتم، به‌دلیل وسعت درونی نظریهٔ اعداد و نیازمندی به دیگر حوزه‌های ریاضی، دامنهٔ مطالعاتم گسترش یافت. برای مثال، یکی از تجربیاتم این بود که در دورهٔ لیسانس، عمدهٔ دانشجویان از معادلات دیفرانسیل بیزار بودند و علاقه‌ای به پیگیری آن نداشتند. به همین دلیل من هم در دوران تحصیلم، مطالعهٔ جدی‌ای در این بخش نداشتم، اما در دورهٔ دکتری، تازه ارتباط نظریهٔ اعداد و معادلات دیفرانسیل را دیدم و تازه متوجه شدم چه دنیای قشنگی را از دست داده‌ام.

بنابراین در حال حاضر، تقریباً شاخه‌ای از ریاضیات نیست که به آن علاقه نداشته باشم، به این معنی که همهٔ بخش‌ها برای من جالب‌اند. اما فعالیت من در این حوزه‌ها بستگی به زمانم دارد، چراکه من به‌دنبال آن شکل تخصصی نیستم.

دستاورد احتمالاً آن چیزی است که دیگران به چشم می‌بینند. ولی در ذهن من، تعریف متفاوت دیگری از دستاورد با آنچه که به‌عنوان دستاورد می‌شناسیم وجود دارد. دستاورد ممکن است برای فردی کار بزرگی باشد که در ریاضیات انجام داده است یا مقاله‌ای که نوشته است، اما برای من در این جغرافیا و موقعیتی که در آن زیست می‌کنم، دستاوردها چیز دیگری است و آن دستاوردی که در ذهنم دارم، هنوز به وجود نیامده است، اما در راستای آن هستم.

### ۳. چه شد که تصمیم گرفتید خارج از ایران تحصیل کنید؟

مهم‌ترین انگیزه‌ام این بود که نظریهٔ اعداد، شاخه‌ای که علاقه داشتم، در ایران وجود نداشت و استاد خاصی هم برای تدریس نبود. البته دلایل فردی دیگری هم وجود داشت، مثلاً بخش عمدهٔ مطالعات غیرریاضی من، غربی بود و تمایل داشتم آن فضا را از نزدیک تجربه کنم.

### ۴. تحصیل در رشتهٔ ریاضی خارج از ایران چطور بود؟

در واقع می‌توانم بگویم اگر این تجربه را نمی‌داشتم، چیزی در زندگی‌ام کم بود. بدون آن تجربه، نمی‌توانستم مسیرم را به‌خوبی طی کنم و از روی بخت و اقبال در آن محیط قرار گرفتم. همیشه مثلاً اسم 'ماکس پلانک' را می شنیدم و برایم به نوعی معبد ریاضیات بود، اما خوب بر اثر بخت و اقبال بود که من آنجا درس خواندم و نمی‌توانم بگویم که از این تجربه راضی نیستم، چراکه تجربهٔ واقعاً کم‌نظیری است.

لحظه‌ای که در حال انجام کاری هستید، احساس نمی‌کنید چه اتفاقی برای شما در حال رقم خوردن است، اما زمانی که از تجربه‌ای که انجام داده‌اید دور می‌شوید و زمان می‌گذرد، می‌فهمید. الان که نگاه می‌کنم می‌بینم تجربه‌ای بوده که من شاگرد یکی از بزرگ‌ترین 'نظریه اعداددانان نیمهٔ دوم قرن بیستم' باشم. این اتفاق خیلی ساده‌ای برای من نیست، هرچند ممکن است اتفاق‌های اینچنینی برای افراد رقم بخورد که جای خوبی ادامه تحصیل بدهند، اما رخ دادن این اتفاق برای من که ریاضی یکی از دغدغه‌های زندگی‌ام بوده، اما نه مهم‌ترین و اصلی‌ترین دغدغه، امروزه مایهٔ افتخار است.

### ۵. از تجربهٔ ملاقات‌های خود با ریاضیدان‌های خارج از کشور بگویید.

با توجه به اینکه شما آنجا دانشجواید و بسته به تیپ شخصیتی‌تان، همیشه آینده برایتان مبهم است و معمولاً گرفتار سؤالات زیادی هستید؛ چگونه تز دکترا بنویسید، چگونه با این استاد تمام بکنید و ... . به‌دلیل قرار داشتن در موقعیت دانشجویی، با وجود همهٔ ابهام‌ها و نگرانی‌های فردی، امکان اینکه آزادانه از شرایط استفاده کنید، فراهم نیست. من حس می‌کنم که بله! اگر با تجربهٔ امروزم دوباره آنجا باشم، استفاده‌های بهتری خواهم کرد، ولی همین‌قدر هم برای من گرانبهاست. مثلاً استاد من 'دون زاگیر' آدمی استثنایی بود، خیلی کم می‌شد او را دید چراکه مدام در سفر بود. اینکه بتوانی زمانی برای دیدار پیدا کنی و تازه بر همهٔ خجالت و ترس خود غلبه کنی و سؤالی بپرسی، نه برای من که برای خیلی‌ها، سخت بود. شاید اغراق نباشد که بگویم نابغه‌ترین آدمی است که از نزدیک شناختم، زبان‌های زیادی بلد بود، حتی چینی و ژاپنی، پیانیست قابلی بود و وقتی ریاضی صحبت می‌کرد از زبان مکالمهٔ روزمره سریع‌تر حرف می‌زد. اما برعکس آدم‌هایی که متکبرند و یا تو را با حرف‌هایشان تحقیر می‌کنند، انسان بسیار مهربانی بود و این تجربهٔ خوبی برای من شد. در خیلی از اتفاقات نظریهٔ اعداد دوران معاصر حضور دارد و آدم‌های زیادی راجع به او حرف زدند. 'یوری منین[۵]' در کار با سری‌های نامتناهی او را با رامانوجان

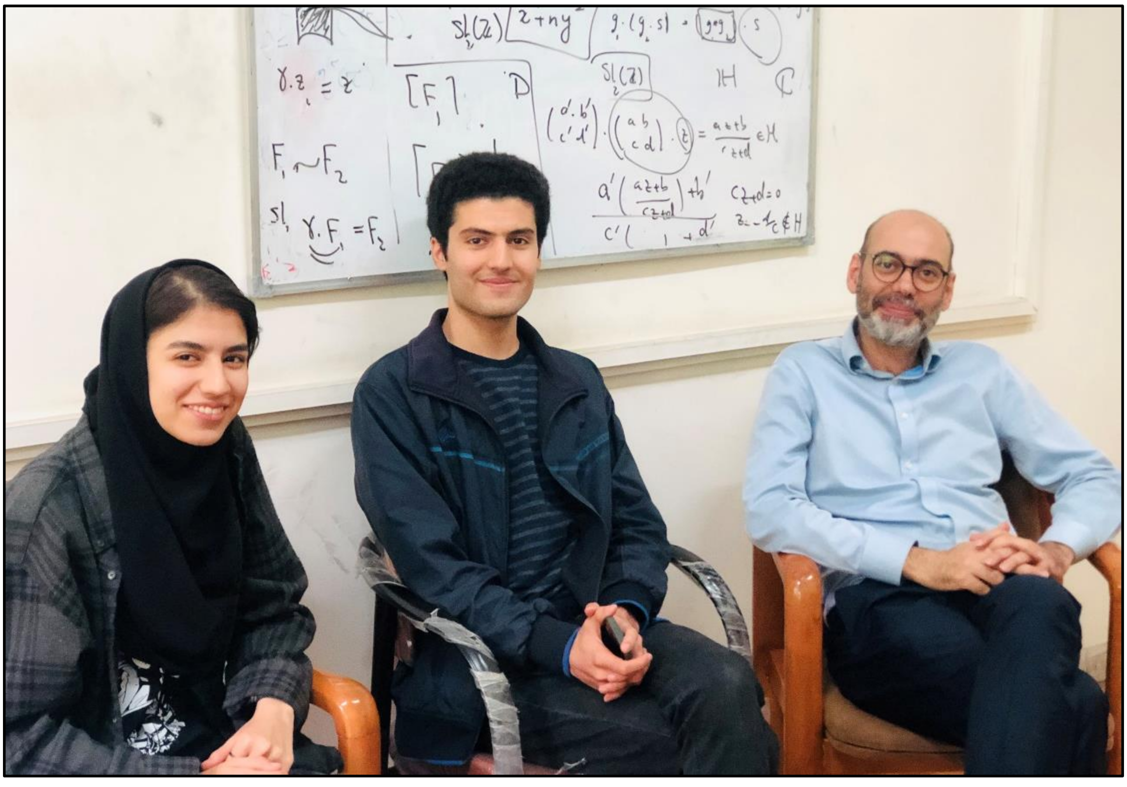
مقایسه کرده و یا 'ژان پیر سر[6]' می‌گوید که فرمول گروس - زاگیر را یکی از زیباترین فرمول‌های قرن بیستم است. خوب کار کردن با این جور آدم‌ها سخت است.

### ۶. چرا تصمیم گرفتید به ایران برگردید؟

باز هم به ایران برگشتن دلایل متعددی دارد. یکی از دلایلش این است که مجدد تکرار می‌کنم ریاضی بخشی از دغدغه‌های من است، ولی همهٔ دغدغه من نیست.

### ۷. بزرگ‌ترین ریاضیدان حال حاضر را چه کسی می‌دانید؟

برای این سؤال فکر و جوابی دارم، اما به نظرم جواب این سؤال هرچه باشد، جواب خیلی مفیدی نیست که من صرفاً بگویم $x$ یا $y$ چراکه تغییری در کار شما ایجاد نمی‌کند. از یک طرف، می‌توانم بگویم که بزرگ‌ترین ریاضیدان هنوز به دنیا نیامده است، چون که بزرگ‌ترین ریاضیدان کسی است که فرضیهٔ ریمان را حل کند. از طرف دیگر می‌توانم بگویم برای خود من چه ریاضیدان‌هایی الهام‌بخش بودند و این افراد، به دلایل خاصی که شخصی است، در زندگی من تأثیر داشتند و با ایشان رابطهٔ عاطفی دارم. چنین ریاضیدانانی برای من، چند تا هستند. از قدما فیثاغورث و خیام که برایم الگوی انسان کامل‌اند و از دوران جدید ریاضیدانانی که هر کدام ویژگی‌ای دارند که برای من حائز اهمیت است. مثلاً 'فرما' به‌دلیل اینکه ریاضیدان آماتور و قاضی بود و ریاضیات را به‌عنوان حرفه دنبال نمی‌کرد، برای من الهام‌بخش بوده است که حرفه‌ای بودن و تخصصی بودن لزوماً چیز خاصی نیست و هر کسی باید در ریاضیات راه خودش را برود و پیمودن این راه، ممکن است کاملاً متفاوت باشد. فرما کسی بود که ذوق و سلیقهٔ گسترده‌ای داشت؛ یعنی درست است که تخصصش نظریهٔ اعداد بود، ولی خیلی از شاخه‌های ریاضی را بنیان گذاشت و اینکه بزرگ‌ترین یا به زعمی بزرگ‌ترین ریاضیدان قرن هفدهم یک ریاضیدان آماتور باشد، همیشه برای من الهام‌بخش بوده است. بعد از فرما ریاضیدانی که در من تأثیر داشته، 'گاوس' است. دربارهٔ بخشی از زندگی‌نامهٔ گاوس در سخنرانی دانشکده گفته‌ام. بنا به همان سمینار و البته دلایل بی‌شمار دیگری مثل نبوغ زیاد گاوس، شیوهٔ زیستش که همیشه برای من جذاب بوده است، به گاوس علاقه‌مندم. ریاضیدان بعدی که من به او علاقه‌مند بودم و هستم، 'ریمان' است. ریمان هم به هر حال کسی است که فکر می‌کنم در بین ریاضیدان‌ها محجوب‌ترین است، چراکه خیلی آدم استثنایی است و تحول بنیادی در ریاضیات به وجود آورده و ما ورود به عصر جدید ریاضیات را با ریمان می‌شناسیم. انسان هرچه بیشتر می‌خواند، بیشتر درکش می‌کند و پشت همهٔ کارهای ریمان، ایمانی الهی نسبت به ریاضیات و نسبت به هستی وجود دارد که کارهای متفاوت او را در پیوند الهیاتی قرار می‌دهد. مثلاً ممکن است بپرسید چرا نظریهٔ اعداد کار می‌کند، چرا هندسه و هزار کار مختلف؟ ولی همهٔ این‌ها از یک ریشه می‌آید و برای من این نکته در ریاضیدان‌ها



اهمیت دارد. ریاضیدان بعدی که من خیلی او را دوست دارم و شما هم در درس‌ها دیده‌اید، ’هیلبرت‘ است. به‌دلیل آن نگاه‌های فلسفی که به ریاضی داشته و در بین ریاضیدان‌ها، مهم‌ترین پرسش‌های فلسفی را مطرح کرده است. هیلبرت پیشگام ریاضی‌ای است که ما امروزه در قرن بیستم می‌شناسیم، به‌واسطهٔ تلاش‌های او در اصل موضوعی‌سازی ریاضیات و هم به هر حال لیست مسائلی که تعیین کرده، به نوعی آیندهٔ ریاضیات را تعیین کرده و یا به هر حال همهٔ آن بحث‌های فلسفی که منجر به کارهای ’گودل‘ شده و او یکی از درخشان‌ترین ذهن‌های بشری است، به او لقب کافکای ریاضی داده‌اند، آدمی که بدبینی ذاتیش منجر به قضایای معروفش شد. یک افلاتون‌گرای راسخ در زمانه‌ای که همگان تلاش می‌کنند ریاضیات را از جهان مُثُلی پایین بکشند. گودل به‌دلیل آن دستاوردهایش و اینکه آدم بسیار عجیبی است و ’آندره ویل‘، به‌دلیل اینکه آندره ویل مثال ایدئالی من برای ریاضیدان است. آدمی است که فقط ریاضیدان نیست، تجربه‌های فرهنگی زیادی دارد و کارهای زیادی بیرون از ریاضیات کرده و فرد خیلی جالبی است. این افراد ریاضیدان‌هایی بودند که دوست دارم.

### ۸. شما بین دانشجویان به‌واسطهٔ علاقه به تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، معروف‌اید. چه شد که این زمینه‌ها را برای مطالعه انتخاب کردید؟

من انتخاب نکردم، انتخاب شدم (خنده). زمانی که در دورهٔ مدرسه، ریاضی می‌خواندم، طبیعتاً کتاب‌های فوق برنامه که درسی هم نبودند، مطالعه می‌کردم و آن زمان کتاب‌های غیردرسی در زمینهٔ ریاضی، زیاد چاپ می‌شد. مثلاً ’پرویز شهریاری‘ کتاب‌های زیادی ترجمه می‌کرد و این کتاب‌ها، واقعاً جالب بودند. چند مورد از کتاب‌هایی که من خواندم، در امروز من، خیلی تأثیر گذاشته است. مثلاً اسم یکی از این کتاب‌ها ’آفرینندگان ریاضیات عالی‘ بود، کتابی که در مورد تاریخ به وجود آمدن حسابان بود و با اینکه تقریباً مسیر استدلال‌ها و نمادهای پیچیده‌اش را نمی‌فهمیدم، ولی شیفته‌اش بودم چون هم مجموعه‌ای بود اعم از زندگی‌نامه‌ها و هم فضای خیلی جالبی را به شیوهٔ تاریخی، از کارهایی که در برههٔ به وجود آمدن حسابان توسط ’کپلر‘ و دیگران انجام شده بود ترسیم می‌کرد. این کتاب خیلی تأثیر زیادی روی من گذاشت، البته که عوامل دیگر هم به‌تدریج در روحیهٔ آدم تأثیر می‌گذارند و چون غیر از ریاضی، علایق دیگری هم داشتم به مرور همهٔ این‌ها کمک کرد تا من به این سمت پیش بروم. در نهایت یکی از اهدافی که دنبال می‌کنم، مسئلهٔ آموزشی است و اگر شما تاریخ و فلسفه را هم در مسئلهٔ آموزش لحاظ بکنید، اولاً درک ریاضی برای دانشجو بهتر پیش می‌رود و ملموس‌تر خواهد شد و دوم اینکه خودتان عمیق‌تر نگاه می‌کنید. وقتی شما به فلسفه می‌پردازید، فلسفه پرسش‌های عمیق‌تری را پیش پای شما می‌گذارد و درنتیجه چیزی که همیشه از برابرش به‌راحتی می‌گذشتید، ممکن است پرسش شود و شما را به راه‌های جدیدی بکشاند. بنابراین به نظر من، دانستن تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، حداقل می‌تواند برای آموزش ریاضی مفید باشد.

### ۹. چرا به نظر شما آموزش ریاضی و تاریخ ریاضی همراه با هم، بهترین تأثیر را در افزایش فهم و علاقهٔ افراد دارد؟

به‌دلیل اینکه چیزی که من می‌خواهم منتقل کنم - البته تز من نیست - ریاضیات یک فرهنگ است، ریاضیات صرفاً یک دیسیپلین تکنیکال برای حل یک سری مسائل نیست. وقتی که دید شما این باشد که ریاضیات یک فرهنگ است و این فرهنگ باید مدام گسترش پیدا کند، عملکرد شما هم متفاوت می‌شود. تا زمانی که کشوری فرهنگ آن موضوع را نداشته باشد، نمی‌تواند عملکرد مناسبی داشته باشد. مثلاً شما نگاه کنید در کشور، همیشه نگاه به این موضوع ابزاری است؛ المپیاد برای این است تا مدالی گرفته شود، ولی آموزش ریاضی دبیرستان ما افتضاح است. در غرب ادعا می‌شود که علم برای طاقچه خوب نیست و قرار است که مشکلات را حل کند و در نهایت رفاه بیاورد. علم هزاران مشکل برای ما به وجود آورده است، ولی حداقل این ادعا را که من رفاه می‌آورم، توانسته جواب دهد. اما در اینجا، علم فقط مدالی است روی سینه، یک مقام است، اینکه فرد را دکتر یا عالم خطاب کنند. برای این است که می‌گویم فرهنگ مهم است. فرهنگ تنوع دارد و در آن اتفاقات مختلفی می‌افتد. وقتی شما وارد ریاضی می‌شوید، قرار نیست که مثلاً همه ریاضیدان بشوند، قرار نیست همه در یک مؤسسهٔ تحقیقاتی صبح تا شب بنشینند فکر کنند. در همه‌جای دنیا، آموزش و پرورش و دانشگاه زیر نظر انجمن ریاضی هستند، اما در ایران اینچنین نیست و انجمن ریاضی کارایی لازم را ندارد و در گسترش ریاضی در سطح عموم جامعه کوتاهی می‌کند. پس تاریخ ریاضی بخشی از این فرهنگ ریاضی است. شما نمی‌توانید مثلاً بگویید که متعلق به جایی هستید، اما چیزی از تاریخ سرزمینی که به آن تعلق دارید ندانید و ندانید که چطور رشد کرده و فراز و نشیب آن چه بوده و آدم‌هایش چه کسی بودند.

### ۱۰. آیا یک دانشجوی ریاضی می‌تواند با استفاده از رشتهٔ خود، از حوزه‌های دیگر بهره ببرد؟ چگونه؟

هم بله و هم نه. به‌دلیل اینکه کسی که مواجههٔ درستی با ریاضیات داشته باشد، مواجههٔ درستی با همه‌چیز خواهد داشت، اما کسی که

مواجهۀ درستی با ریاضیات نداشته باشد، آن موقع دیگر فرقی نمی‌کند که شما ریاضی خواندی یا تاریخ خواندی یا مثلاً ... نمی‌دانم، ممکن است جواب من کاربردی نباشد؛ اینکه خوب مواجهۀ درست چیست و بالاخره جواب چه چیزی است. می‌گویم نمی‌دانم، چون رشتۀ ریاضی در ایران رشته‌ای است که آن‌طور که باید و شاید، جایگاهش را پیدا نکرده است. به‌دلیل اینکه دست اندرکارانش نبودند یا به قول ابراهیم بیک در سیاحت نامه‌اش:

«باغ را گناهش چیست که باغبانش کاهل و تن‌آسای باشد.»

**۱۱. به نظر شما چه مواردی می‌تواند دانشجویان ریاضی را در دوران تحصیل دغدغه‌مند کند؟ آیندۀ شغلی در ایران یا مهاجرت به خارج؟**

دغدغه‌مند به چی کند؟

**که پیگیر ریاضی شود. اینکه مثلاً یک نفر در طول شبانه‌روزش از صبح که از خواب بیدار می‌شود، بخواهد که زندگی و تایمش را برای ریاضی وقف کند. فکرش درگیر موضوعات و کار ریاضی باشد و ... .**

خوب کار سختی است. نمی‌دانم که چگونه کسی ناگهان علاقه‌مند می‌شود. یعنی دانشجوی ریاضی باشد و وقتش را برای کار بیرون از دانشگاه بگذارد، ویژگی دوران ماست دیگر، یعنی مثلاً ... .

**مثلاً با توجه به جریان رودخانه‌ای که الان هست، یک نفر بخواهد خلاف آن شنا کند، بالاخره باید انگیزه‌ای وجود داشته باشد. به نظر شما آن انگیزه، چه باید باشد؟**

نگاه کنید، آن انگیزه ممکن است در نهایت محکمه‌پسند نباشد. من می‌گویم در جستجوی حقیقت بودن ... . اگر شما در جستجوی حقیقت باشید، این انگیزه هست اما اینکه بگویی «خوب حالا چه چیزی حقیقت است؟!» نمی‌توانم بگویم که خوب این همه انگیزه ... . مثلاً ممکن است کسی مریم میرزاخانی را ببیند و بگوید که می‌شود از اینجا رسید به آنجا و این می‌شود انگیزه. ولی دیگری می‌گوید «خوب او مریم میرزاخانی بود ...». هزار چیز وجود دارد که شما می‌توانید به‌عنوان انگیزه به آن‌ها فکر کنید ولی هزار چیز هم وجود دارد که انگیزه‌تان را از بین می‌برد. خود من که می‌گویم این همه ریاضی را دوست داشتم، سال آخری که دانشجوی دانشگاه شریف بودم، از ریاضی متنفر شده بودم. برای همین نمی‌توانم واقعاً بگویم و توصیه کنم که مثلاً این کار انگیزه است. اینجا محیطی است که نه به درد علم می‌خورد و نه به درد ریاضی. شما باید از این محیط و داده‌های محیطی رها شوید و این رهایی، اتفاقی درونی است که آن هم کار سختی است و برای آدم‌های فرد است، نه برای آدم‌های جمع. با توجه به تجربه‌ای که خارج از ایران داشتم، می‌گویم که اگر این اتفاق برای من نمی‌افتاد، ممکن بود خیلی چیزها برای من تمام شود. اما این بدان معنی نیست که هر کسی باید به خارج برود، ممکن است فردی درک متفاوتی داشته باشد و در ایران هم بتواند ... یا از ابتدا بگوید که این مسیر اشتباهی است و از مسیر دیگری برود. مسئله آن تصمیمی است که بگیرید و پای آن بایستید.

**۱۲. اگر دانشجویی علاقه‌مند به تحصیل یا کار در خارج از کشور باشد، به نظر شما چطور می‌شود در این زمینه به او کمک کرد؟**

چه کسی و چطور کمک می‌کند؟

**مثلاً شما اساتید حاضرید در چه زمینه‌هایی به او کمک کنید؟**

تأکید می‌کنم که علم در آن سمت، اصلاً شوخی نیست. چیزی که ما اینجا در علم، سهل‌انگاری داریم و سرسری برگزار می‌کنیم. آنجا این‌گونه نیست و محیط کاملاً جدی است، دیسیپلین دارد. شما وقتی وارد آن محیط می‌شوید، جو آن‌قدر متفاوت است که ناگهان انگیزه‌های شما صد برابر می‌شود. ممکن است شما اینجا حس کنید که دیگر انگیزه‌ای ندارید، استعدادی ندارید و شکست خوردید، ولی ناگهان آنجا شکوفا می‌شوید. این‌ها هست ولی شما هرچقدر سواد خود را در اینجا زیاد کنید، آنجا راحت‌تر خواهد بود. چون آنجا در علم، دشواری‌هایی را متحمل خواهید شد که باید از پیش برایشان آماده باشید. حالا که به زمانی که رفتم ماکس پلانک نگاه می‌کنم، می‌بینم با اینکه شریف درس خوانده بودم، خیلی چیزها خوانده بودم، درس‌های اضافه می‌خواندم، ساعت‌های مختلفی بیرون از دانشگاه برای ریاضی وقت می‌گذاشتم و کار می‌کردم و با وجود اینکه ریاضی در همۀ دوره‌ها و همیشه برای من بخش مهمی بود، ولی آدم‌هایی می‌دیدم که شما اصلاً ... مثلاً 'نیکلای دوروف' برادر 'پاول دوروف' مالک تلگرام. او حالا مغز متفکر امنیت تلگرام است، آنجا شاگرد 'گرد فالتینگز[۷]' بود. نابغه بود و تازه فالتینگز می‌گفت تزش کاربرد ندارد یا مثلاً هم‌دوره‌ای ما 'مجید هادیان' بود که او هم شاگرد فالتینگز بود و واقعاً آدم باهوشی بود. یکی از بهترین دانشجویان آنجا بود و و تزش فالتینگز را خیلی هیجان‌زده کرده بود، چون واقعاً فالتینگز هیچ‌کس را تحویل نمی‌گرفت، هیچ‌کس را

قبول نداشت، ولی واقعاً کاری که کرده بود، همه‌جا سر و صدا کرده بود. برای او کنفرانس برگزار شد. به هر حال خیلی اهمیت داشت. مثلاً هم‌شاگردی من، امسال مدال فیلدز گرفته است. من آدم‌هایی را می‌شناسم که الان در تاریخ ریاضی، شما فقط می‌توانید اسمشان را بشنوید. اینکه شما در چنین جوی، بدون پیشینهٔ لازم حرکت کنید، بسیار سخت است. برای همین توصیه‌ام این است که اگر می‌خواهید جایی بروید، ترجیحاً جای خوب، باید آمادگی لازم را داشته باشید.

**الان هم با افرادی که گفتید، در ارتباط هستید؟**

نه. به دلیلی که می‌دانید، باز برمی‌گردم به یک چیز روحی در خودم. چون من در حال دنبال کردن مسیری هستم که این مسیر، برای من مثل مسیری است که شما به سفر می‌روید و این مسیر همیشه در خاطراتتان هست. بخشی هم بازمی‌گردد به اینکه من معمولاً به جاهایی که می‌روم، برنمی‌گردم. این شکلی دوست دارم (خنده).

**۱۳. برای موفقیت در رشتهٔ ریاضیات در خارج از کشور چه مهارت‌های به‌خصوصی لازم است؟**

همان‌طوری که گفتم، هزاران عامل می‌تواند مؤثر باشد، مثلاً سواد ریاضی، سواد برنامه‌نویسی، زبان خارجی، ارتباط عمومی و شانس (خنده). بله شانس خیلی مهم است، زیرا ریاضیات در عین اینکه جدی و بدون انعطاف است ولی از جنبه‌هایی، چون در ریاضیات مسیرهای زیادی وجود دارند که بتوانند شما را به موفقیت برسانند، ممکن است شما در کانالی بروید که به جایی نرسد، پس خیلی مهم است که استاد راهنمای شما چه کسی است و شما را در چه مسیری می‌اندازد و چه مسائلی برای شما طرح می‌کند و و و ... . ممکن است شما با شرایط متوسط‌تری به نسبت دیگران، ناگهان موفقیت‌های خیلی خوبی به دست بیاورید و ممکن است فرد دیگری ... . اصلاً قابل قیاس نیست. خیلی به شرایط استاد راهنما، دانشگاه و بعدتر به محیطی که در آن کار علمی انجام می‌دهید، بستگی دارد. هم این‌ها خیلی مهم هستند و هم اینکه اگر می‌خواهید جایی بروید، آدم‌های آنجا، شخصیتشان و حتی خلق و خوی آن‌ها را بشناسید. مثلاً گاهی اوقات اسم‌ها بزرگ‌اند، با آن‌ها کار می‌کنید اما با خود می‌گویید کاش با فردی که مثلاً اسم متوسط‌تری داشت ولی کار من را بهتر ارائه می‌کرد، کار می‌کردم. همهٔ این عوامل مؤثرند، مثلاً استادهای مسن، خیلی خوب نیستند، به‌دلیل اینکه دیگر حوصلهٔ کافی و وقت ندارند و استادهای جوان هم تجربیاتی را.

**۱۴. به نظر شما، آیا شرکت در پروژه‌های تحقیقاتی و صنعتی، می‌تواند در زمینهٔ آیندهٔ شغلی کمک‌کننده باشد؟ اگر بله، فکر می‌کنید چگونه می‌توان به دانشجوها در این زمینه کمک کرد تا در زمان تحصیل بیشتر به این موضوع بپردازند؟**

دربارهٔ صنعت و شرایط اطلاعی ندارم، اما اگر که تفکر ریاضی به‌نحو درستی در فرد شکل بگیرد، می‌تواند کمک‌کننده باشد. یعنی در مواجهه با مسائلی که در صنعت یا پروژه هست، این نوع تفکر کمک می‌کند که شما بتوانید ارتباطی بین جهان واقع و جهان انتزاعی ریاضیات برقرار کنید. هر ارتباطی که مغز شما بین دو حوزهٔ مختلف برقرار می‌کند، به‌نوعی توانایی شما را بالا می‌برد. دورهٔ لیسانس، تفکر اشتباهی بین ما رایج بود که مثلاً ریاضیات کاربردی، کم‌ارزش است و ارزش تئوریک ریاضیاتی را که ما می‌شناسیم ندارد، اما اشتباه می‌کردیم. امروز معتقدم که خوب می‌بود اگر بخش‌هایی از ریاضیات کاربردی را که در صنعت دیده می‌شود به دانشجو نشان دهیم، مثلاً نحوهٔ مدل کردن جهان واقعی برای استفاده، چگونگی استفاده از ریاضی در مدل و فرایند جالب مدل‌سازی، چراکه می‌تواند ذهن شما را باز کند و پرورش دهد.

یکی دیگر از اشتباهاتی که ما می‌کردیم این بود که خیلی به فیزیک بها نمی‌دادیم، درحالی‌که می‌دانستیم اهمیت دارد ولی هیچ موقع به‌طور عمقی آن را بررسی نکردم. بخشی از این برمی‌گردد به اینکه معلم‌های فیزیکی که ما داشتیم، معلم‌های خوبی نبودند یا مثلاً در دانشگاه دو تا فیزیکی که پاس کردیم، فیزیک‌های جذابی برای من نبودند. ممکن است کسی که فیزیک می‌خواند شروع کند از مکانیک و

این‌ها، و خوب ممکن است اصلاً مکانیک برای من جذاب نباشد، ولی مباحثی در فیزیک هست که باعث رشد ریاضی شما می‌شود و بالعکس. این‌ها حوزه‌هایی هستند که به نظر من حداقل بتوانیم به آن‌ها توجه کنیم.

**۱۵. در پایان اگر مطلب یا سخنی برای گفتن هست، شنوای شماییم.**

نمی‌دانم، صحبتی از قبل آماده نکرده‌ام اما می‌شود توصیه‌هایی داشت. وقت خود را تلف نکنید؛ انسان در دورانی که شما هستید، بسیار وقت خودش را تلف می‌کند و در این سنین، زمان، آن ارزشی را که بعدتر برایش پیدا می‌کند، ندارد. مهارت‌های زیادی هست که شما باید در این سنین یاد بگیرید و بعدتر که دوست دارید و آرزو می‌کنید آن مهارت‌ها را داشته باشید، فرصت کافی برای پرداختن به آن‌ها را ندارید.

در جوانی این فرصت وجود دارد که بعضی مهارت‌ها را یاد بگیرید؛ مثلاً یاد گرفتن زبان برای ادامهٔ کار شما خیلی مهم است، یا مثلاً یادگیری چیزهایی را که به آن‌ها علاقه دارید حتماً حتماً پشت گوش نیندازید که حالا پنج سال بعد و حالا بگذار تا بعد و ... . اگر از همین لحظه یادگیری آنچه را که به آن علاقه دارید آغاز کنید و به‌طور خیلی کند و آهسته ادامه بدهید - هرچه که علاقه دارید ساز و موسیقی یا کار یا هرچه که دوست دارید - بعد از ده سال هرچقدر هم کند پیش رفته باشید، در نهایت به مهارتی در آن کار می‌رسید که ممکن است دیگران متعجب شوند که چگونه به این مهارت رسیدید، ولی لازمهٔ آن رسیدن، شروع کردن از همین سن و سال است.

چیزهایی که در این سن و سال می‌توانید پیدا کنید، در سی‌سالگی ممکن است دیر باشد. توصیه‌ای که می‌توانم بکنم این است که هم یادگیری چیزهایی را که در دنیای امروز به آن‌ها نیاز دارید شروع کنید و هم پیگیر علایقتان باشید و اجازه ندهید دیر بشود. مثلاً من از اواخر دوران دبیرستان به نوشتن علاقه داشتم و آن را شروع کردم ولی خوب خیلی کند، چون هم ریاضی می‌خواندم هم دچار تنش بودم که بالاخره باید نویسنده شوم یا ریاضیدان. بارها ریاضی را رها کردم و به‌سمت نویسندگی رفتم و یا نویسندگی را در دوره‌ای کنار گذاشتم و دوباره ریاضی ... ، این تنش برای من خیلی سخت بود. تا مدتی نمی‌دانستم که باید کدام را انتخاب کنم ولی ادامه دادم. سخت است اما خوب وقتی به سرانجامی می‌رسد، دیگر آن ستیزه‌ها وجود ندارد. مثلاً در دورهٔ دانشگاه بارها به خودم گفتم که ریاضیات دیگر برای من تمام شده و حس می‌کردم که مسیر من، ادبیات است، چون با روابط انسانی سر و کار دارد و ریاضی خشک است و ... . اما به‌طور مداوم چیزی درون آدم هست که می‌گوید فقط باید ادامه بدهی. جملهٔ قشنگی از اسقف آواکوم هست که وقتی همسر خسته و از پا افتاده‌اش از او می‌پرسد: تا کجا باید پیاده راه برویم؟ و او در جواب می‌گوید: «تا لب گور زن» و از اینجا به بعد است که همسرش روی پاهای خود می‌ایستد و مسیر را ادامه می‌دهد.

---

۱ Max Planck

۲ The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP)

۳ Don Zagier

۴ Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)

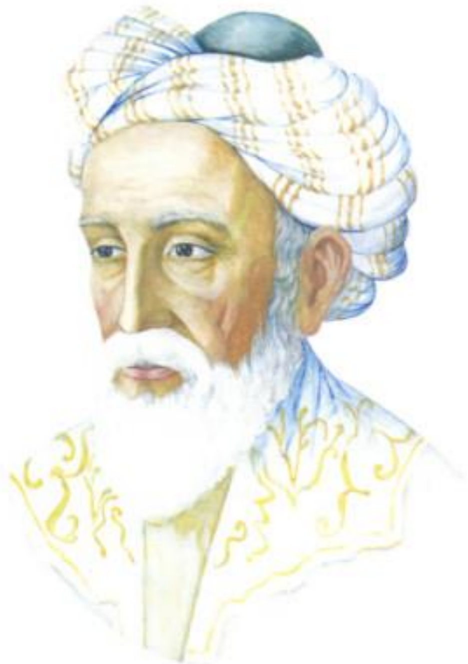
۵ Yuri Manin

۶ Jean-Pierre Serre

۷ Gerd Faltings

# عمر خیام نیشابوری

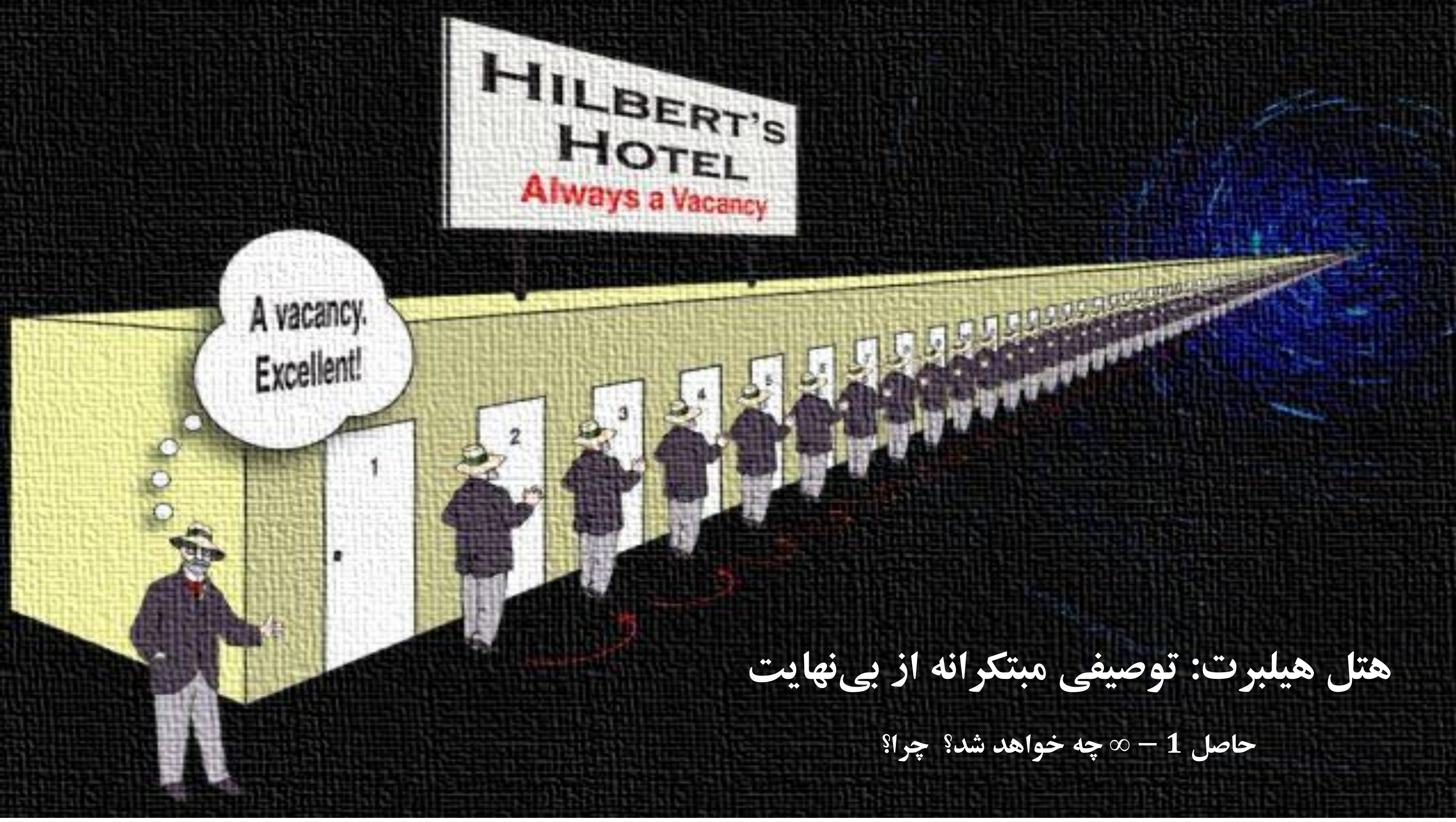
۴۴۰-۵۱۷ هجری قمری



اکثر کسانی که امروز نمودی از یک اندیشمند دارند، بدون آنکه فراتر از تقلید در علم بروند، فقط با تظاهر به آگاه بودن، بر دروغ لباس حقیقت می‌پوشانند.

دانشی که آن‌ها اندوخته‌اند فقط برای استفاده‌های جسمانی است. آن‌ها اگر با کسی مواجه شوند که حقیقت‌جو و حقیقت‌دوست است و تلاش می‌کند که دروغ و ریا را رد کند و از فخرفروشی و فریب بپرهیزد، او را مورد تحقیر و تمسخر قرار می‌دهند.

از مقدمهٔ رساله فی البراهین علی مسائل الجبر و المقابله




# هتل هیلبرت: توصیفی مبتکرانه از بی‌نهایت

## حاصل $1-\infty$ چه خواهد شد؟ چرا؟

**مترجم: درسا سماوی**

دانش‌آموختۀ کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهید بهشتی

تصور کنید به یک هتل بی‌نهایت می‌رسید؛ یعنی هتلی شامل بی‌نهایت اتاق. شما به اتاقی احتیاج دارید، تنها مشکل متصدی پذیرش هتل (علاوه بر داشتن دفتری بزرگ از مهمانان) این است که هتل کاملاً پر شده و حالا او باید یک اتاق هم برای شما پیدا کند.

اما متصدی پذیرش، آدم باهوشی است. او به مهمان اتاق ۱ می‌گوید به اتاق ۲ نقل مکان کند و به مهمان اتاق ۲ می‌گوید تا به اتاق ۳ نقل مکان کند و به‌طور کلی، مهمان اتاق $n$ به اتاق $n+۱$ نقل مکان کند. فرض می‌کنیم که همگی به‌طور هم‌زمان اتاق‌هایشان را تعویض می‌کنند. هنگامی که این انتقال به اتمام برسد، اتاق ۱ خالی خواهد شد و تمامی مهمانان نیز در اتاقی مستقر شده‌اند.

خیلی هم عالی! این آزمایش نشان می‌دهد که $\infty = ۱ + \infty$. در هتلی با تعداد بی‌نهایت اتاق که به‌طور کامل رزرو شده است، همواره می‌توان اتاقی برای یک مهمان دیگر یافت.

### نبوغ دیوید هیلبرت

دیوید هیلبرت - یکی از بزرگ‌ترین و پرآثارترین ریاضیدانان قرن بیستم - در سال ۱۹۲۴ این تمثیل را ابداع کرد تا مجموعه‌های نامتناهی غیرقابل شهود و هندسهٔ لایتناهی را در سخنرانی خود با عنوان 'دربارهٔ بی‌نهایت' شرح دهد.

هیلبرت قصد داشت نشان دهد چگونه دربارهٔ بی‌نهایت فکر کنیم و چگونه با آن به‌صورت صحیح کار کنیم. پیام او این بود که «از آن نترسیم» بلکه به‌گونه‌ای ساختاریافته، از جنبه‌های بسیار آن استقبال کنیم.

این مسئله، تابویی در تاریخ ریاضیات شمرده می‌شد و ریاضیدانان اولیه، مانند جورج کانتور که سعی کردند بی‌نهایت را به‌طور صحیح بررسی کنند، مورد انتقادات بسیاری توسط معاصران خود قرار گرفتند. با این حال، هیلبرت به زیبایی این تئوری پی برد!

برخی از این مشکلات ناشی از غیرقابل شهود بودن مجموعه‌های نامتناهی است. به گفتهٔ ویکیپیدیا:

> هنگامی که تعداد نامتناهی اتاق وجود داشته باشد، عبارات «به‌ازای هر اتاق، مهمانی وجود دارد» و «هیچ مهمان دیگری نمی‌تواند مستقر شود» معادل یکدیگر نیستند.

باید توجه کنیم که می‌بایست عبارت $\infty = ۱ + \infty$ را با دقت بیان کنیم؛ چراکه بی‌نهایت، عددی حقیقی یا مختلط نیست و درنتیجه

این تساوی هیچ معنایی نخواهد داشت مگر اینکه 'فضای اعدادی' را که در آن کار می‌کنیم، تعریف کرده باشیم.
با این وجود، به وضوح فرض می‌کنیم که در فضایی گسترش‌یافته مانند خط حقیقی گسترش‌یافته یا صفحهٔ مختلط گسترش‌یافته کار می‌کنیم، فضایی که در آن اجازه داریم اعداد را به $\infty$ اضافه یا از آن کم کنیم.
حال به آزمایش ذکرشده بازگردیم. اگر $k$ نفر به هتل بی‌نهایتِ کاملاً رزروشده مراجعه کنند و $k$ اتاق درخواست کنند چه اتفاقی خواهد افتاد؟ هیچ مشکلی پیش نخواهد آمد، کافی است به هر مهمان بگوییم که به اتاقی با شمارهٔ اتاق خودشان به‌علاوهٔ $k$ برود. در این صورت، $k$ اتاق اول قابل استفاده خواهند بود و تمامی مهمانان، اتاقی خواهند داشت. به‌طور مثال، اگر ۳ نفر به هتل مراجعه کنند و هر کدام از آن‌ها نیز اتاقی درخواست کنند، از شخص داخل اتاق ۱ خواسته خواهد شد تا به اتاق ۴ منتقل شود، از شخص داخل اتاق ۲ خواسته می‌شود تا به اتاق ۵ منتقل شود و همین‌طور ادامه خواهد یافت.
اکنون که کار پیش می‌رود، تکلیف سوال مطرح‌شده در عنوان این مقاله چه خواهد شد؟ چطور باید $\infty - ۱$ را معنا کنیم؟ خب، کافی است در هتل بی‌نهایت از شخص داخل اتاق ۱ بخواهیم از هتل خارج شود و سپس شخص داخل اتاق ۲ را به اتاق ۱ منتقل کنیم، شخص داخل اتاق ۳ را به اتاق ۲ منتقل کنیم و همین‌طور تا $\infty$ ادامه بدهیم. به عبارت دیگر $\infty - ۱ = \infty$.

## به‌سوی بی‌نهایت

همه چیز تا اینجا خوب است، اما اگر تعداد بی‌نهایت تا مهمان جدید به هتل مراجعه کنند چه خواهد شد؟ در اینجا وقتی صحبت از بی‌نهایت می‌کنیم، در واقع منظورمان تعداد شمارا نامتناهی است که تعبیر ریاضیاتی این است که بگوییم می‌توان هر شخص را با اعداد طبیعی (صحیح و مثبت) برچسب‌گذاری کرد.
این‌بار نمی‌توان مثل آنچه در گذشته انجام دادیم، فقط مهمانان را منتقل کنیم؛ چراکه در این صورت بی‌نهایت انتقال لازم خواهد بود. با این حال، می‌توان این مسئله را با منتقل کردن مهمان ساکن در اتاق ۱ به اتاق ۲، مهمان اتاق ۲ به اتاق ۴ و به‌طور کلی با منتقل کردن مهمان ساکن در اتاق $n$ به اتاق $۲n$ حل کرد.
برای ما اهمیتی ندارد که برخی از مهمانانِ اتاق‌هایی با شماره‌های بزرگ لازم است به اتاق‌هایی که احتمالاً خیلی از آن‌ها دور است منتقل شوند؛ بلکه تنها چیزی که برای ما اهمیت دارد، ریاضیات پشت ماجراست.
حال، تمام اتاق‌های با شمارهٔ فرد، خالی هستند و می‌توانیم بی‌نهایت تا مهمان جدید را در این اتاق‌ها مستقر کنیم.
آنچه در اینجا بیان شد، به این معناست که اندازهٔ مجموعهٔ نامتناهی اعداد طبیعی (که به آن کاردینال گویند)، برابر با کاردینال اعداد طبیعی زوج است (حتی با وجود اینکه مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج، زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی است).

یک لحظه صبر کنید...! آیا این بدان معناست که تعداد اعداد طبیعی با تعداد اعداد طبیعی زوج برابر است؟

خب در واقع می‌توان گفت بله...!
در ریاضیات، مجموعه‌های نامتناهی را با در نظر گرفتن توابعی میان آن‌ها با یکدیگر مقایسه می‌کنیم و در مورد این وضعیت خاص، می‌توانیم تابع $f(n) = ۲n$ را از اعداد طبیعی به اعداد طبیعی زوج تعریف کنیم. این تابع، دارای وارونی به‌صورت $g(n) = n/۲$ است که تابعی از اعداد طبیعی زوج به اعداد طبیعی است. به‌علاوه $f$ دوسویی است، یعنی تمام اعداد طبیعی زوج، حتماً متناظر با یکی از آرگومان‌های $f$ هستند و یک عدد زوج می‌تواند حداکثر مقدار یکی از این آرگومان‌ها را بگیرد. به چنین تابعی، تناظری یک‌به‌یک و پوشا گویند. در واقع به این معناست که اعضای دو مجموعه‌ای را که توسط تابع به یکدیگر نظیر می‌شوند می‌توان با هم جفت کرد.
فکرش را بکنید اگر شمردن بلد نباشید، ولی بخواهید دو دسته سنگ را با هم مقایسه کنید، چه می‌کنید؟ تنها وظیفهٔ شما این خواهد بود که تعیین کنید کدام دسته بیشترین تعداد سنگ را دارد. برای جفت کردنشان می‌توانید مکرراً یک سنگ از هر دسته بردارید و این کار را تا جایی ادامه دهید که یا تنها یک دسته باقی بماند یا هیچ دسته‌ای باقی نماند. در این صورت عملیات پایان می‌یابد. اگر تنها یک دسته باقی بماند، نتیجه می‌گیریم که این دسته، بیشترین تعداد سنگ‌ها را دارا بوده است و اگر به هنگام پایان یافتن عملیات، هر سنگ با سنگ دیگری نظیر شود و هیچ دسته‌ای باقی نماند، نتیجه می‌گیریم که تمام سنگ‌ها را می‌توان با یکدیگر جفت کرد و بنابراین تعداد سنگ‌های برابری در هر دسته وجود داشته است.
هنگامی که این مفهوم را به مجموعه‌های نامتناهی بسط بدهیم، دقیقاً به فرایندی مشابه آنچه در بالا در مورد سنگ‌ها بیان کردیم مواجه می‌شویم. این عملیات جفت‌سازی، به‌جای سنگ‌های کوچک، با توابع دوسویی انجام می‌پذیرد.

### برخی بی‌نهایت‌ها از برخی دیگر، بزرگ‌تر هستند.

اگر تعداد نامتناهی از اتوبوس‌های شامل نامتناهی سرنشین به هتل بی‌نهایتِ کاملاً رزروشدهٔ ما برسند و همگی اتاقی بخواهند چه می‌شود؟ مشکلی نیست!! می‌توانیم هر اتوبوس و هر صندلی اتوبوس را با عددی طبیعی شماره‌گذاری کنیم (به هر حال، ما با مجموعه‌هایی نامتناهی و شمارا سروکار داریم). سپس هر سرنشین، آدرسی خاص به فرم دو عدد خواهد داشت: عدد $s$ که نشان‌دهندهٔ شمارهٔ صندلی اتوبوس او و عدد $b$ که نشان‌دهندهٔ شمارهٔ اتوبوس است. برای افرادی که از قبل در هتل ساکن بوده‌اند، فرض می‌کنیم $b = ۰$. سپس به‌سادگی، هر فرد را در اتاق $۲^s.۳^b$ مستقر می‌کنیم.

به‌عنوان مثال، فردی که در اتاق $۲^۹.۳^۷ = ۱۱۱۹۷۴۴$ مستقر می‌شود، در اتوبوس شمارهٔ ۷ و صندلی شمارهٔ ۹ نشسته بوده است. به‌سادگی می‌توان این روند را به تعداد لایه‌های بیشتری با تعداد نامتناهی عدد اول دیگر گسترش داد.

به‌طور مثال، اگر تعداد نامتناهی کشتی باربر که هر کدام تعداد نامتناهی اتوبوس شامل نامتناهی مسافر را حمل می‌کنند داشته باشیم، مشابه بالا می‌توانیم تمام افراد را در هتلمان مستقر کنیم. کافیست عدد اول ۵ را به الگوریتم 'دگرگونی‌های بایسته'[۱] اضافه کنیم.

حال، سه لایهٔ تودرتو از بی‌نهایت داریم و هر تعداد متناهی از لایه‌ها نیز به همین روش قابل حل است؛ به هر حال تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد، بنابراین هیچ‌وقت واقعاً تمام نمی‌شوند.

روش تجزیه به اعداد اول، یکی از چندین روش برای حل این مسئله است. البته که نکتهٔ مهم این است که این مسئله، قابل حل است. اما با بی‌نهایت لایهٔ تودرتو از بی‌نهایت‌ها چه کنیم؟ به نظر می‌رسد که چنین مسئله‌ای، همیشه قابل حل نیست! چراکه برخی از بی‌نهایت‌ها از برخی دیگر بزرگ‌ترند!

بله، درست متوجه شدید. وقتی صحبت از 'اندازه' یا کاردینال مجموعه‌ها می‌شود بی‌نهایت، فقط بی‌نهایت نیست. به‌طور مثال، کاردینال مجموعهٔ تمام کسرهای اعداد صحیح برابر است با کاردینال مجموعهٔ اعداد طبیعی.

درست است! با اینکه اعداد صحیح مثبت خودشان هم کسر محسوب می‌شوند، اما تعداد کسرهای اعداد صحیح برابر است با تعداد اعداد صحیح مثبت. این موضوع را می‌توانیم با یافتن تناظری دوسویی میان این دو مجموعه ثابت کنیم. یعنی تناظری یک‌به‌یک میان دو مجموعه می‌توان یافت که هر عضو از یکی را به عضوی از دیگری نظیر می‌کند. این را به‌عنوان تمرینی ساده، به مخاطب واگذار می‌کنیم.

اگر تناظری دوسویی میان اعداد طبیعی (اعداد مثبت صحیح) و مجموعه‌ای مانند $A$ وجود داشته باشد، آنگاه گوییم $A$ شماراست و کاردینال آن برابر است با کاردینال اعداد طبیعی $\mathbb{N}$. معمولاً این کاردینال را $\aleph_0$ نشان می‌دهیم.

### پیوستار

خب، پس برخی بی‌نهایت‌ها از برخی دیگر بزرگ‌تر هستند، اما این موضوع سؤال جالبی را مطرح می‌کند، نه؟ نمونه‌هایی از مجموعه‌های با کاردینال بزرگ‌تر از اعداد طبیعی کدام‌اند؟ به عبارت دیگر، یک مجموعهٔ ناشمارا، چه شکلی است؟ و چه تعداد بی‌نهایت مختلف وجود دارد؟ این‌ها سؤالاتی هستند که به ذهن می‌رسند.

به‌عنوان نمونهٔ خوبی از مجموعه‌ای با کاردینال بزرگ‌تر از اعداد طبیعی می‌توان به اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ اشاره کرد. این مجموعه، ناشماراست؛ یعنی تناظری دوسویی میان $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ وجود ندارد. البته که مجموعهٔ اعداد حقیقی شامل تمام کسرها است، اما علاوه بر آن شامل اعدادی مانند $\pi$ و $e$ نیز است که نمی‌توان به‌صورت کسرهایی از اعداد صحیح نوشت.

به این مسئله که آیا بی‌نهایتی وجود دارد که از کاردینال اعداد طبیعی بزرگ‌تر باشد ولی از کاردینال اعداد حقیقی کوچک‌تر باشد، 'فرضیهٔ پیوستار' می‌گویند و نشان داده شده است که درستی یا نادرستی این فرضیه در دستگاه اصل موضوعی مورد بحث ما، قابل اثبات نیست.

این مسئله به فلسفهٔ مرزی تبدیل می‌شود و وارد حوزهٔ فراریاضیات و منطق ریاضی می‌شویم که در آن می‌توانیم بررسی کنیم که برای حل این مسئله آیا لازم است از دستگاه‌های اصل موضوعی دیگری استفاده کنیم یا خیر. این به نوبهٔ خود شکلی بیگانه از ریاضیات را ایجاد می‌کند. از نظر من که خیره‌کننده است!

به‌علاوه، در واقع تعداد بی‌نهایت نوع مختلف از بی‌نهایت‌ها وجود دارد؛ حال، بی‌شک سؤال اینجاست که چه نوع بی‌نهایتی؟

### مرجع:

https://www.cantorsparadise.com/hilberts-hotel-an-ingenious-explanation-of-infinity-1d1a79932080

[۱] mutatis mutandis

# در حاشیهٔ بی‌نهایت

## احتمال پریشانی

یک استادیوم ۱۰۰ هزار نفری را در نظر بگیرید که صندلی‌های آن از ۱ تا ۱۰۰ هزار شماره خورده‌اند و ۱۰۰ هزار تماشاچی بلیط‌هایی با شماره ۱ تا ۱۰۰ هزار دارند که قرار است طبق شمارهٔ خود روی صندلی‌ها بنشینند. اگر هیچ کنترلی در کار نباشد و به‌طور اتفاقی بنشینند، چقدر احتمال دارد که هیچ‌کسی در جای خود نباشد؟

هر حالت از نشستن $n$ نفر روی $n$ صندلی را یک جایگشت می‌نامیم و اگر هیچ‌کسی در جای خود نباشد، چنین جایگشتی یک جایگشت پریش نامیده می‌شود. وجه تسمیهٔ آن این است که چنین رفتاری، از پریشانی این جامعه حکایت دارد.

با دانش اندکی که از اصل ضرب در مدرسه کسب کرده‌ایم، می‌دانیم تعداد جایگشت‌ها برای $n$ نفر برابر است با

$$n! = ۱ \times ۲ \times \cdots \times n$$

که مقدار اخیر را $n$ فاکتوریل می‌نامیم. مثلاً ۵ فاکتوریل برابر است با ۱۲۰.

همچنین با استفاده از اصلی موسوم به اصل شمول و عدم شمول، پاسخ صریح برای مسئلهٔ شمارش تعداد جایگشت‌های پریش برابر است با

$$n¡ = n!\left(\frac{۱}{۰!} - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{(-۱)^n}{n!}\right)$$

که $n$ زیرفاکتوریل نامیده می‌شود. مثلاً ۵ زیرفاکتوریل برابر است با ۴۴.

با تقسیم کردن زیرفاکتوریل $n$ بر فاکتوریل $n$ می‌توانیم احتمال پریش بودن جایگشت را برای $n$ نفر محاسبه کنیم و اگر $n$ را به‌سمت بی‌نهایت میل دهیم، مقدار حدی این احتمال به دست می‌آید.

با قدردانی از تیلور و نیز مک‌لورن، می‌دانیم که حد خارج‌قسمت

$$n¡/n!$$

وقتی $n$ به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند (که برابر با

$$\frac{۱}{۰!} - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots$$

است) عبارت است از ۱ تقسیم بر $e$. مقدار اخیر چیزی برابر با ۳۶ درصد است.

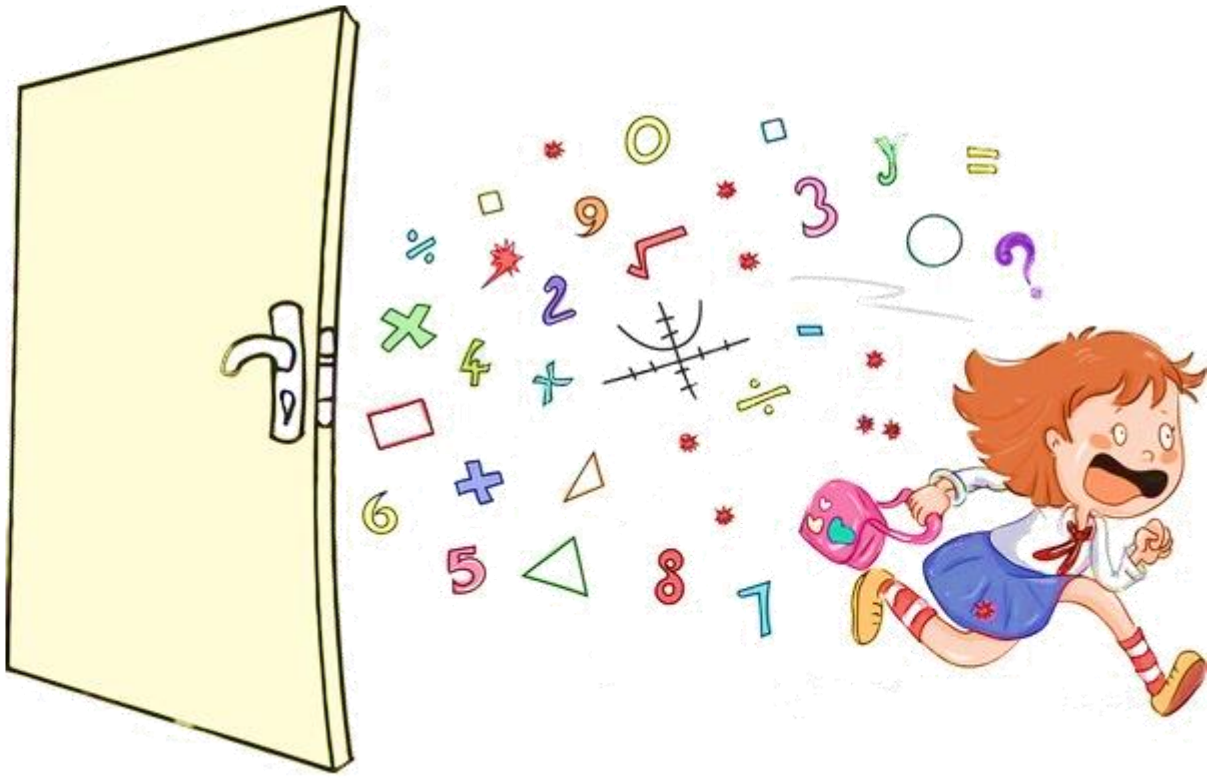
این محاسبه هشدار عمیقی در خود دارد: امیدوار نباشید که اگر افراد را به حال خود رها کنید، بالاخره حداقل یک نفر به‌طور شایسته در جای خود قرار می‌گیرد. احتمال معتنی‌بهی وجود دارد که حتی یک نفر هم در جای خود نباشد.

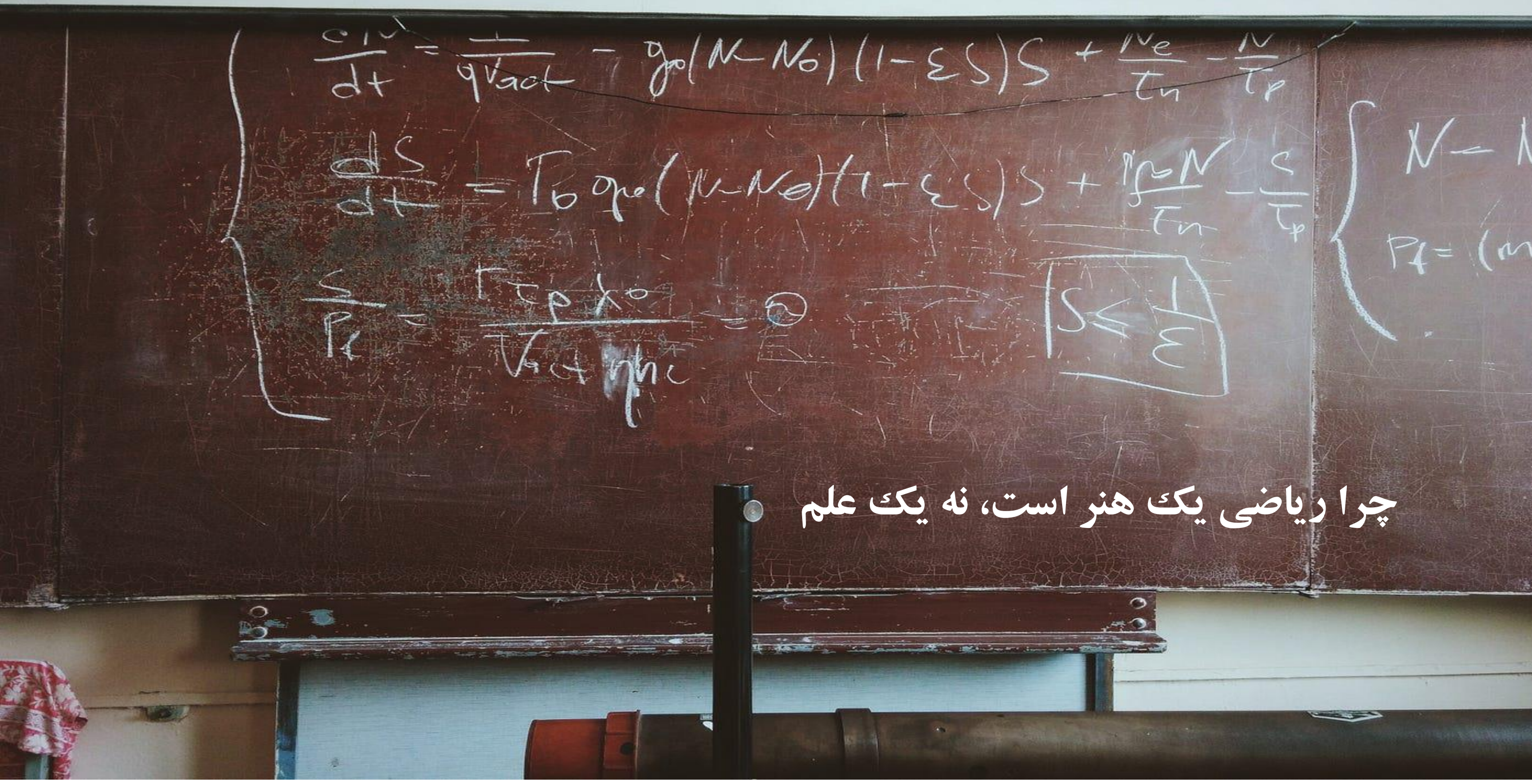
باید نگران جامعه‌ای بود که خرمهره‌ها بازار گوهرفروشی اندیشه را تسخیر کرده‌اند. اهل خرد را قدر بدانید و بر صدر بنشانید، چراکه نشستنِ افرادِ سزاوار بر مصطبهٔ شایستگی، به خودی خود رخ نخواهد داد و وقوع درستی بدون تلاش برای نشاندن بذر حقیقت در مزرعهٔ خرد، چندان محتمل نیست.

مجید میرزاوزیری

۲۶ اردیبهشت ۰۲

# من و ریاضیات





# چرا ریاضی یک هنر است، نه یک علم

**مترجم: شقایق دیانت‌شعار**

دانش‌آموختهٔ کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهید بهشتی

ریاضیات معمولاً در گروه علوم قرار دارد، هم در فهرست‌های رسمی، هم در تصور عوام. کسانی که در علم خوب هستند معمولاً در ریاضی هم خوب عمل می‌کنند، ولی این دو موضوع از خیلی جهات با یکدیگر متفاوت هستند. ریاضی از بعضی جهات شباهت بیشتری به یکی از شاخه‌های هنر دارد تا یکی از علوم، ولی واقعاً منحصربه‌فرد و یگانه است. افراد بسیار اندکی ریاضی و هنر را در یک گروه قرار می‌دهند، بنابراین من در این مقاله ریاضی و علوم را در برابر هم قرار می‌دهم، تفاوت‌هایشان را برجسته می‌کنم، همچنین ریاضی و هنر را مقایسه می‌کنم و شباهت‌هایشان را نشان می‌دهم.

## موضوع اصلی

علوم در مورد مسائلی در جهان حقیقی است. هر علم، حوزهٔ خودش را دارد با بعضی هم‌پوشانی‌ها. عموم مردم تحصیل‌کرده اندیشه‌ای خام و نادقیق دربارهٔ موضوع اصلی حوزه‌های علوم مختلف دارند. بعضی عقاید مانند:

- فیزیک در مورد موضوعاتی مثل فشار، جرم، ستاره‌ها و ذرات بنیادی اتم است.
- شیمی در مورد اتم‌ها و مولکول‌هاست.
- زیست دربارهٔ موجودات زنده است.
- روانشناسی در مورد مغز و ذهن و مواردی شبیه به آن است.

ولی به‌طور متوسط، بزرگان تحصیل‌کرده تقریباً هیچ نظری در مورد اینکه ریاضیات دربارهٔ چیست و ریاضیدانان چه می‌کنند، ندارند. این مسئله به خاطر چگونگی تدریس ریاضی و تفاوت آن با نحوهٔ تدریس علوم است. در دبیرستان برای درس شیمی، کارهایی شبیه به فرایندهای شیمیایی انجام می‌دهند، قطعاً خیلی مصنوعی‌تر از افراد ماهر، ولی حداقل در محدودهٔ تقریباً مشابهی. آن‌ها مواد شیمیایی را با یکدیگر ترکیب می‌کنند و اتفاقی را که رخ می‌دهد تماشا می‌کنند، اما شما می‌توانید به‌راحتی از دبیرستان فارغ‌التحصیل شوید بدون آنکه حتی یکی از کارهایی را که ریاضیدانان انجام می‌دهند انجام دهید، یا حتی بدون یادگیری آنکه چه کاری انجام می‌دهند. پس ریاضیدانان چه می‌کنند؟ آن‌ها قضایا را خلق و اثبات می‌کنند. این قضایا دربارهٔ هیچ چیزی در جهان حقیقی نیستند، بلکه در مورد اشیای

مجردی مانند اعداد، اشکال، مجموعه‌ها، توابع و ... هستند.
بخش عمده‌ای از ریاضیات در مورد اشیایی است که بسیار مجرد هستند به‌طوری که افراد غیرمتخصص، هیچ اطلاعات و واژه‌ای برای درک اینکه آن اشیا چه هستند، ندارند. اندکی از مردم خواهند دانست که **عدد $p$-ادیک**[1] به چه چیز گفته می‌شود یا **جبر لی**[2] چیست.
ولی بیایید یکی را که همهٔ ما تا حدی با آن آشنا هستیم در نظر بگیریم: اعداد. بیایید حتی ساده‌تر فکر کنیم و در مورد شمارش اعداد صحبت کنیم: ۱، ۲، ۳، ... که به‌طور رسمی‌تر اعداد صحیح مثبت نامیده می‌شوند. مطالعهٔ پیشرفتهٔ آن، نظریهٔ اعداد نامیده می‌شود که این مزیت را دارد که بسیاری از غیرریاضیدانان می‌توانند حدس‌ها و قضایای آن را درک کنند. برای مثال، حدس اعداد اول دوقلو بیان می‌کند که تعداد نامتناهی اعداد اول دوقلو وجود دارد که (اعداد اول دوقلو) اعداد اولی هستند که ۲ واحد از هم فاصله دارند. بخشی از اولین مثال‌ها عبارت‌اند از:

- ۳ و ۵
- ۵ و ۷
- ۱۱ و ۱۳
- ۱۷ و ۱۹

تا حد زیادی انتظار می‌رود که حدس اعداد اول دوقلو صحیح باشد و مقدار بسیار زیادی از زوج‌های اول دوقلو شناخته شده‌اند (هر عدد بزرگ‌ترین زوج ۳۸۸٬۳۴۲ رقم دارد)، ولی نمی‌دانیم که تا همیشه ادامه دارد یا نه. هیچ‌کس اثبات نکرده است که تا بی‌نهایت ادامه دارد یا نه.
ساده است که **اعداد اول** را تعریف کنیم: آن‌ها اعداد صحیح بزرگ‌تر از ۱ هستند که تنها بر ۱ و خودشان بخش‌پذیر باشند. تعریف کردن اعداد اول دوقلو نیز ساده است؛ پیش‌تر انجام دادم. ولی درمورد **اعداد** چطور؟ بسیار وابسته به ترفند است.
شما هرگز یک را ندیده‌اید. البته **نمایش** اعداد را دیده‌اید. شما می‌توانید این کار را با ارقام ۱، ۲، ۳ و ... و همچنین با کلمات یک، دو، سه و ... انجام دهید. ولی این‌ها اعداد نیستند. همان‌گونه که کلمهٔ 'گربه' گربه نیست، نماد '۲' عدد نیست.
شما می‌توانید دو چیز از یک نوع را ببینید: دو سیب، دو انسان و مثال‌هایی از این قبیل، اما نمی‌توانید ۲ را ببینید. گیاه‌شناسان سیب‌ها را مطالعه می‌کنند، روانشناسان انسان‌ها را بررسی می‌کنند، ریاضیدانان اعداد را مطالعه می‌کنند درحالی‌که آن‌ها (اعداد) عیناً وجود ندارند.
زمانی یک استاد فیزیک به من گفت:

> در فیزیک، اگر ما ندانیم بعضی چیزها چه هستند، یک نام به آن می‌دهیم، سپس می‌دانیم که چیست.

معادل ریاضی آن بیشتر شبیه عبارت زیر است:

> در ریاضی اگر چیزی وجود نداشته باشند، ما آن را می‌سازیم، سپس وجود دارد.

بنابراین، علوم دربارهٔ چیزهای واقعی، چیزهای محسوس و عینی، و چیزهایی هستند که می‌توانید به آن‌ها نگاه کنید یا حداقل آن‌ها را به‌نحوی تشخیص دهید. ریاضیات این‌گونه نیست. آیا هنر دربارهٔ چیزهای واقعی است؟ گفته می‌شود که مردی پیکاسو را استخدام کرد تا چهرهٔ همسرش را نقاشی کند. نتیجه بسیار انتزاعی شد و مرد شکایت کرد که هیچ شباهتی به همسرش ندارد. پیکاسو سؤال کرد که همسرش چگونه به نظر می‌رسد و مرد یک عکس بیرون آورد. پیکاسو پاسخ داد: «او بسیار کوچک است و بسیار مسطح.»

### اهداف

ریاضی و علوم اهداف بسیار متفاوتی هم دارند. علوم به‌دنبال تفسیر و توضیح حقایق هستند و این تفسیرها را فرضیه یا نظریه می‌نامند. یک فرضیه می‌تواند برای 'به اندازهٔ کافی خوب بودن' پذیرفته شود و نیازی نیست که درستی مطلق آن اثبات شود، در حقیقت، دانشمندان هم تلاشی برای این کار نمی‌کنند، بلکه آن‌ها دائماً فرضیه‌هایشان را با ورود حقایق جدید اصلاح می‌کنند. اما ریاضیدانان برای اثبات درستی مطلق تلاش می‌کنند. ریاضیدانان حدس‌ها و قضایا را مطرح می‌کنند (مانند حدس اعداد اول دوقلو) و سپس به‌دنبال اثبات درستی آن قضایا به معنای مطلق هستند. حتی زمانی که درستی قضیه‌ای اثبات می‌شود، ریاضیدانان همچنان به‌دنبال اثبات‌های دیگر هستند. شاید آموختهٔ خود در مورد قضیهٔ فیثاغورث را به یاد بیاورید:

> در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموعِ مربعات دو ضلع دیگر.

این قضیه هزاران سال است که شناخته شده است. صدها اثبات دارد. چرا؟ اگر که قضیه‌ای تاکنون اثبات شده است چرا ریاضیدانان به ارائهٔ اثبات‌های بیشتر می‌پردازند؟ برای یک ریاضیدان، این یک سؤال احمقانه است. مثل این است که بپرسیم چرا هنرمندان نقاشی کردن منظره‌ها را ادامه می‌دهند درحالی‌که نقاشی‌هایی از مناظر وجود دارد، یا چرا آهنگسازان نوشتن آهنگ‌های عاشقانه را ادامه می‌دهند درحالی‌که هزاران آهنگ از آن‌ها وجود دارد.

ریاضیات به‌دنبال نوع مشخصی از زیبایی است؛ یک زیبایی بسیار انتزاعی و بسیار ساختاریافته. مانند معماری است. یک ساختمان باید زیبا باشد، اما باید سرپا و استوار هم باشد. همچنین شبیه به شکل ساختاریافته‌تری از شعر است. یک غزل باید زیبا باشد، اما همچنان باید از الگوی قافیه و وزن خاصی پیروی کند. یک قضیهٔ ریاضیاتی باید زیبا باشد، اما باید آن را اثبات هم کنید (و اثبات‌ها هم می‌تواند زیبا باشند). ریاضیدان جی اچ هاردی[۳] گفته است:

> زیبایی اولین آزمون است. هیچ جایگاه ماندگاری در جهان برای ریاضیات زشت وجود ندارد.

کار دیگری که ریاضیدانان انجام می‌دهند تعمیم قضایا است. قضیهٔ فیثاغورث در اصل برای مثلث‌های قائم‌الزاویه روی سطح صاف به کار می‌رفت، اما ریاضیدانان آن را به انواع دیگر سطوح، به هندسهٔ فضایی (درمورد اجسام سه‌بعدی) و به اشکال دیگر تعمیم داده‌اند.

در اینجا، ریاضی بیشتر شبیه یک هنر است تا علم. ریاضیدانان همواره به‌دنبال قضایای جدید و اثبات‌های زیباتر قضایا هستند، همان‌طور که هنرمندان به‌دنبال شکل‌های جدید برای هنر و تفاسیر زیباتری از اشکال قدیمی هستند. نقاشان مکاتب جدید را ارائه می‌دهند؛ نوازندگان در قالب جدید آهنگسازی می‌کنند. همهٔ آن‌ها به‌دنبال زیبایی هستند. دانشمندان همواره به‌دنبال توضیح بهتری از حقایق هستند.

### اصالت تاریخی

وجه تمایز دیگر بین ریاضی و علم این است که ریاضی از کارهای قدیمی استفاده می‌کند، ولی علم آن را نادیده می‌گیرد. ریاضیدانان هنوز قضیهٔ فیثاغورث را می‌آموزند، با آنکه حداقل ۱۶۰۰ سال پیش از میلاد توسط بین‌النهرینی‌ها شناخته شده بود، ولی دانشمندان ایده‌های ارسطو در مورد فیزیک یا شیمی را مطالعه نمی‌کنند.

در اینجا دوباره، ریاضیات بیشتر شبیه به یکی از هنرهاست تا یکی از علوم. هنرمندان هنر قدیمی را مطالعه می‌کنند و تمام راه را تا نقاشی‌های غارها برمی‌گردند. هنر قدیمی و ریاضیات قدیمی منسوخ نمی‌شوند، علم قدیمی منسوخ می‌شود.

### حتمیت

ممکن است که دنیایی را با قوانین متفاوت فیزیکی تصور کنیم. بسیاری از فیزیکدانان باور دارند که چندین جهان وجود دارد که قوانین فیزیکی آن‌ها با یکدیگر متفاوت است. بعضی از نویسندگان ژانر علمی تخیلی دربارهٔ این جهان‌ها نوشته‌اند. اما تصور دنیایی با ریاضیات متفاوت، حتی اگر ممکن باشد، بسیار دشوارتر است.

ما می‌توانیم دنیایی را تصور کنیم که در آن ثابت گرانشی بالاتر یا پایین‌تر است، اما آیا می‌توانیم دنیایی را تصور کنیم که در آن ۳ اول نیست؟ فلسفه‌های ریاضی گوناگونی وجود دارد، همان‌گونه که فلسفه‌های مختلف هنر یا زیبایی یا اخلاق یا هر چیز دیگری وجود دارد. افلاطون‌گرایان باور دارند که حقیقت ریاضی در جهانی ایده‌آل وجود دارد که در آنجا 'شکل‌ها' یا نمایش‌های ایده‌آلی از اشیای ریاضی وجود دارد (این، شبیه باورهایشان دربارهٔ چیزهای دیگر است). صورت‌گرایان معتقدند که ریاضی بازی با نمادها است (و این شباهت‌هایی با برخی از فلسفه‌های تحلیلی دارد). واقع‌گرایان معتقدند که اشیای ریاضی در جهان منظم وجود دارند، ولی صرف نظر از فلسفهٔ ریاضی شما، به نظر می‌رسد تصور جهانی که در آن اعداد صحیح، متفاوت رفتار می‌کنند غیرممکن است. هر گونه‌ای که 'دارای' اعداد صحیح باشد، خواهد دانست که ۳ اول است و ۴ اول نیست.

**مرجع:**

https://www.cantorsparadise.com/why-math-is-an-art-not-a-science-94d234cacb76

---

[۱] p-adic number

[۲] lie algebra

[۳] G. H. Hardy

# شاید پیش از این ندیده باشید

## چرا $\pi^2$ به ۱۰ خیلی نزدیک است؟

شاید تقریب باستانی اما همچنان مفید $\pi \doteq \sqrt{۱۰}$ تصادفی محض به نظر برسد، اما اگر قضیهٔ اویلر را بپذیریم که

$$\pi^۲ = ۶\zeta(۲) = ۶\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$$

آنگاه می‌توانیم به‌راحتی نشان دهیم که $\pi^۲ < ۱۰$ و خطای این تقریب را تخمین بزنیم. در واقع داریم:

$$\zeta(۲) = ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} < ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۴}{۴n^۲ - ۱}$$

این سری، تلسکوپی است چراکه:

$$\frac{۴}{۴n^۲ - ۱} = \frac{۴}{(۲n-۱)(۲n+۱)} = \frac{۲}{۲n-۱} - \frac{۲}{۲n+۱} = \frac{۲}{۲n-۱} - \frac{۲}{۲(n+۱)-۱}$$

درنتیجه:

$$\zeta(۲) < ۱ + \left(\left(\frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۵}\right) + \left(\frac{۲}{۵} - \frac{۲}{۷}\right) + \left(\frac{۲}{۷} - \frac{۲}{۹}\right) + \cdots\right) = ۱ + \frac{۲}{۳} = \frac{۵}{۳}$$

پس همان‌طور که ادعا کردیم، داریم $\pi^۲ < ۳(۵/۳) = ۱۰$ و خطا به‌طور منطقی کوچک است، زیرا:

$$\frac{۵}{۳} - \zeta(۲) = \sum_{n=۲}^{\infty}\left(\frac{۴}{۴n^۲ - ۱} - \frac{۱}{n^۲}\right) = \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{n^۲(۴n^۲ - ۱)}$$

و جملهٔ اول این سری برابر با ۱/۶۰ و جمله‌های بعدی آن بسیار کوچک‌تر است. تقریبی بهتر و هنوز به‌یادماندنی برای مقدار واقعی $\pi^۲ = ۹.۸۶۹۶۰۴۴...$ با بیرون کشیدن جملهٔ دوم $\zeta(۲)$، پیش از به کار بردن نامساوی $۱/n^۲ < ۴/(۴n^۲ - ۱)$، به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\pi^۲ < ۶\zeta(۲) < ۶\left(۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۵}\right) = ۹.۹$$

**مرجع:**


https://fermatslibrary.com/s/why-is-pi-squared-so-close-to-10

# انتقام فیثاغورث

**بشر ریاضی را ابداع نکرده است، بلکه ریاضی آن چیزی است که جهان فیزیکی از آن ساخته شده است.**

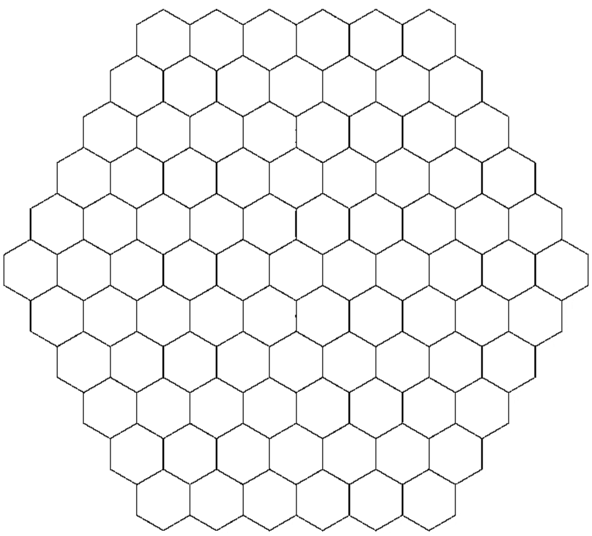

**مترجم: زهرا شیخ‌علی‌ملیانی**

دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهید بهشتی


بسیاری از مردم تصور می‌کنند که ریاضیات یک اختراع انسانی است. در این طرز تفکر، ریاضیات مانند یک زبان است: ممکن است چیزهای واقعی در جهان را توصیف کند، اما خارج از ذهن افرادی که از آن استفاده می‌کنند ’وجود‘ ندارد. اما مکتب فیثاغورث در یونان باستان دیدگاه متفاوتی داشت. طرفداران آن معتقد بودند که هستی، اساساً ریاضی است.
بیش از ۲۰۰۰ سال بعد، فیلسوفان و فیزیکدانان این ایده را جدی گرفتند. ریاضی جزء ضروری طبیعت است که به جهان فیزیکی ساختار می‌دهد.

## زنبورهای عسل و شش‌ضلعی‌ها

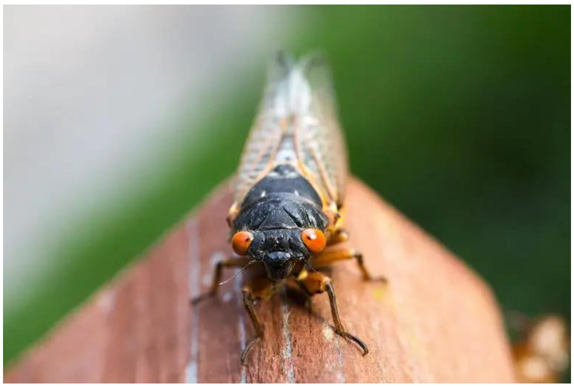
زنبورها در کندو، لانهٔ شش‌ضلعی تولید می‌کنند. اما چرا؟
براساس ’حدس لانهٔ زنبوری‘ در ریاضیات، شش‌ضلعی کارآمدترین شکل برای کاشی‌کاری یک صفحه است. اگر می‌خواهید سطحی را با استفاده از کاشی‌هایی با شکل و اندازهٔ یکنواخت به‌طور کامل بپوشانید، درحالی‌که اندازهٔ محیط را به حداقل برسانید، شش‌ضلعی‌ها شکل مناسبی هستند.
چارلز داروین استدلال کرده که زنبورها تکامل یافته‌اند تا از این شکل استفاده کنند، زیرا شش‌ضلعی بزرگ‌ترین سلول‌ها برای ذخیرهٔ عسل را با کمترین مصرف انرژی در ساخت موم تولید می‌کند.
حدس لانهٔ زنبوری اولین‌بار در زمان‌های قدیم مطرح شد، اما در سال ۱۹۹۹ توسط ریاضیدان توماس هیلز[1] به اثبات رسید.



الگوی شش‌ضلعی لانهٔ زنبوری کارآمدترین راه برای پوشاندن فضا با کاشی‌های یکسان است.

## ملخ و اعداد اول

در اینجا یک مثال دیگر را می‌بینیم. دو زیرگونه از ملخ‌های دوره‌ای آمریکای شمالی وجود دارند که بیشتر عمر خود را درون زمین می‌گذرانند. سپس، هر ۱۳ یا ۱۷ سال (بسته به زیرگونه)، به‌مدت دو هفته در دسته‌های بزرگ بیرون می‌آیند.
چرا ۱۳ و ۱۷ سال است؟ چرا ۱۲ و ۱۴ نه؟ یا ۱۶ و ۱۸؟

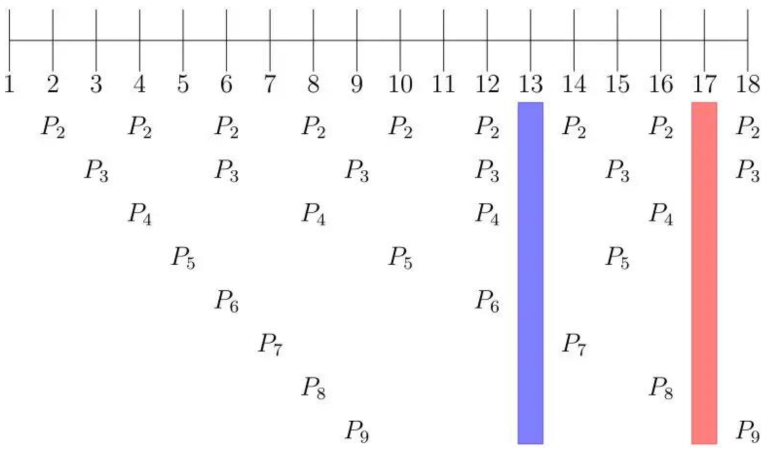


برخی از ملخ‌ها طوری تکامل یافته‌اند که احتمالاً برای دوری از شکارچیان با چرخهٔ زندگی متفاوت، در بازه‌های زمانی چندساله از زمین بیرون بیایند.

یک توضیح برای این واقعیت جذاب آن است که ۱۳ و ۱۷ اعداد اول هستند. تصور کنید ملخ‌ها طیفی از شکارچیان دارند که بیشتر عمر خود را درون زمین می‌گذرانند. ملخ‌ها باید زمانی که شکارچیان آن‌ها در خواب هستند از زمین بیرون بیایند.
فرض کنید شکارچیانی با چرخهٔ زندگی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ سال وجود دارند. بهترین راه برای جلوگیری از همهٔ آن‌ها چیست؟
خوب، یک چرخهٔ زندگی ۱۳ساله و یک چرخهٔ زندگی ۱۲ساله را مقایسه کنید. هنگامی که ملخی با چرخهٔ زندگی ۱۲ساله از زمین خارج می‌شود، شکارچیان ۲ساله، ۳ساله و ۴ساله نیز از زمین خارج می‌شوند، زیرا ۲، ۳ و ۴ همگی مقسوم‌علیه‌های ۱۲ هستند.
وقتی ملخی با چرخهٔ زندگی ۱۳ساله از زمین خارج می‌شود، هیچ‌یک از شکارچیان آن از زمین خارج نمی‌شوند، زیرا هیچ‌کدام از ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ یا ۹ مقسوم‌علیه ۱۳ نیستند. برای ۱۷ هم همین‌طور است.
به نظر می‌رسد این ملخ‌ها برای بهره‌برداری از حقایق اساسی در مورد اعداد تکامل یافته‌اند.

## خلقت یا کشف؟

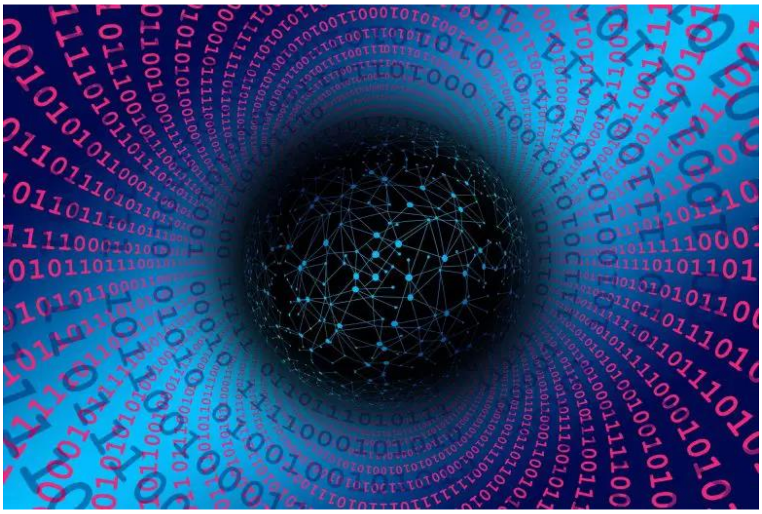
وقتی شروع به جستجو می‌کنیم، به‌راحتی می‌توانیم نمونه‌های دیگری را پیدا کنیم. از شکل غشاهای صابونی گرفته تا طراحی چرخ‌دنده‌ها در موتورها تا مکان و اندازهٔ شکاف‌های حلقه‌های زحل، ریاضیات در همه جا وجود دارد.
اگر ریاضیات، چیزهای زیادی را که در اطراف خود می‌بینیم توضیح می‌دهد، پس بعید است که ریاضیات چیزی باشد که ما خلق کرده‌ایم. به بیان دیگر، حقایق ریاضی کشف می‌شوند: نه فقط توسط انسان، بلکه توسط حشرات، حباب‌های صابون، موتورهای احتراقی و سیارات.




$P_1$ تا $P_9$ نشان‌دهندهٔ شکارچیان دوره‌ای هستند. خط شماره‌گذاری‌شده نشان‌دهندهٔ سال است. شکاف‌های رنگی نشان می‌دهد که چگونه ملخ‌های ۱۳ و ۱۷ساله موفق می‌شوند از شکارچیان خود دوری کنند.

## افلاطون چه فکر می‌کرد؟

اما اگر در حال کشف چیزی هستیم، آن چیست؟
افلاطون، فیلسوف یونان باستان پاسخی داشت. او فکر می‌کرد که ریاضیات اشیایی را توصیف می‌کند که واقعاً وجود دارند. برای افلاطون، این اشیا شامل اعداد و اشکال هندسی بودند. امروزه ممکن است اشیای ریاضی پیچیده‌تری مانند گروه‌ها، رسته‌ها، توابع، میدان‌ها و حلقه‌ها را به این فهرست اضافه کنیم.
افلاطون همچنین معتقد بود که اشیای ریاضی خارج از مکان و زمان وجود دارند. اما چنین دیدگاهی، راز چگونگی توصیف هر چیزی توسط ریاضی را عمیق‌تر می‌کند. این توصیف شامل نشان دادن چگونگی وابستگی یک شیء در جهان به شیء دیگر است. اگر اشیای ریاضی در قلمرویی جدا از دنیایی که ما در آن زندگی می‌کنیم وجود داشته باشند، به نظر نمی‌رسد که با هیچ شیء فیزیکی ارتباط داشته باشند.



برای افلاطون، اعداد در قلمرویی جدا از جهان فیزیکی وجود داشتند.

### منش فیثاغورثی را وارد کنید

فیثاغورثیان باستان با افلاطون موافق بودند که ریاضیات دنیایی از اشیا را توصیف می‌کند. اما آن‌ها برخلاف افلاطون، فکر نمی‌کردند که اشیای ریاضی فراتر از مکان و زمان وجود داشته باشند.

در عوض، آن‌ها بر این باور بودند که هستی فیزیکی از اشیای ریاضی ساخته شده است، همان‌طور که ماده از اتم‌ها. اگر هستی از اشیای ریاضی ساخته شده باشد، به‌راحتی می‌توان دید که ریاضیات چگونه ممکن است در توصیف جهان پیرامون ما نقش داشته باشد.

در دهۀ گذشته، دو فیزیکدان از جایگاه فیثاغورث دفاع قابل توجهی کرده‌اند: کیهان‌شناس سوئدی - آمریکایی مکس تگمارک[۲] و فیزیکدان - فیلسوف استرالیایی جین مک‌دانل[۳].

تگمارک معتقد است که هستی فقط یک شیء بزرگ ریاضی است. اگر عجیب به نظر می‌رسد، به این ایده فکر کنید که هستی یک شبیه‌سازی است. شبیه‌سازی یک برنامۀ کامپیوتری است که نوعی شیء ریاضی است.


پای فیثاغورثی: جهان از ریاضیات و ماده تشکیل شده است.

دیدگاه مک‌دانل بنیانی‌تر است. او فکر می‌کند که هستی از اشیا و ذهن‌های ریاضیاتی ساخته شده است. ریاضیات دربارۀ این است که چگونه جهان، که آگاه است، خود را می‌شناسد.

من از دیدگاه متفاوتی دفاع می‌کنم: جهان دو بخش دارد، ریاضیات و ماده. ریاضیات به ماده شکل می‌دهد و ماده به ریاضیات جوهره می‌دهد. اشیای ریاضی چارچوب ساختاری برای دنیای فیزیکی فراهم می‌کنند.

### آیندۀ ریاضیات

منطقی است که منش فیثاغورثی در فیزیک مجدداً کشف می‌شود. در قرن گذشته، فیزیک بیش از پیش ریاضیاتی شده است و برای توصیف جهان فیزیکی، به حوزه‌های تحقیقاتی به‌ظاهر انتزاعی مانند نظریه گروه‌ها و هندسه دیفرانسیل روی آورده است.

با محو شدن مرز بین فیزیک و ریاضیات، تشخیص اینکه کدام بخش از جهان، فیزیکی و کدام بخش ریاضیاتی است دشوارتر می‌شود. اما عجیب است که منش فیثاغورثی برای زمانی طولانی مورد غفلت فیلسوفان قرار گرفته است.

من معتقدم که این در شرف تغییر است. زمان انقلاب فیثاغورثی فرا رسیده است، انقلابی که نوید می‌دهد درک ما از هستی را به‌طور اساسی تغییر دهد.

مرجع:

https://scitechdaily.com/pythagoras-revenge-humans-didnt-invent-mathematics-its-what-the-physical-world-is-made-of/amp/

۱ Thomas Hales
۲ Max Tegmark
۳ Jane McDonnell

# شاید پیش از این ندیده باشید

## یکی از دو عدد $e+\pi$ یا $\pi e$ می‌تواند گویا باشد، نه هر دو

می‌دانیم که هر دو عدد $\pi$ و $e$ گنگ هستند. یعنی هیچ‌کدام را نمی‌توان به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نوشت. هرچند یکی از دو عدد زیر **می‌تواند** گویا باشد. نمی‌دانیم!

$$e+\pi \qquad , \qquad e\pi$$

یکی از دو حاصل‌جمع یا حاصل‌ضرب $e$ و $\pi$ **باید** گنگ باشد. ریاضیات بسیار دقیق است، پس چگونه می‌توانیم چنین شبه‌قضیهٔ مبهمی داشته باشم؟

می‌دانیم که $e$ و $\pi$ هر دو متعالی هستند، یعنی هیچ‌کدام از این اعداد نمی‌تواند ریشهٔ یک معادلهٔ جبری مانند معادلهٔ درجهٔ دوم زیر باشد:

ضرایب گویا

$$Ax^{۲}+Bx+C=۰$$

$e$ یا $\pi$ نیست

یکی از عناصر مهم این تعریف، گویا بودن ضرایب است. اگر این محدودیت را برداریم، به‌راحتی می‌توانیم یک معادلهٔ درجهٔ دوم بسازیم که $e$ و $\pi$ هر دو ریشه‌های آن باشند:

$$(x-\pi)(x-e)=۰$$

زمانی که این ضرب را بسط می‌دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟

$$x^{۲}-(\pi+e)x+e\pi=۰$$

ضرایب این چندجمله‌ای درجهٔ دو ۱، $-(\pi+e)$ و $e\pi$ هستند. اگر **تمام** این ضرایب گویا باشند، آنگاه ریشه‌های آن عدد جبری هستند. یعنی این ریشه‌ها متعالی نیستند.

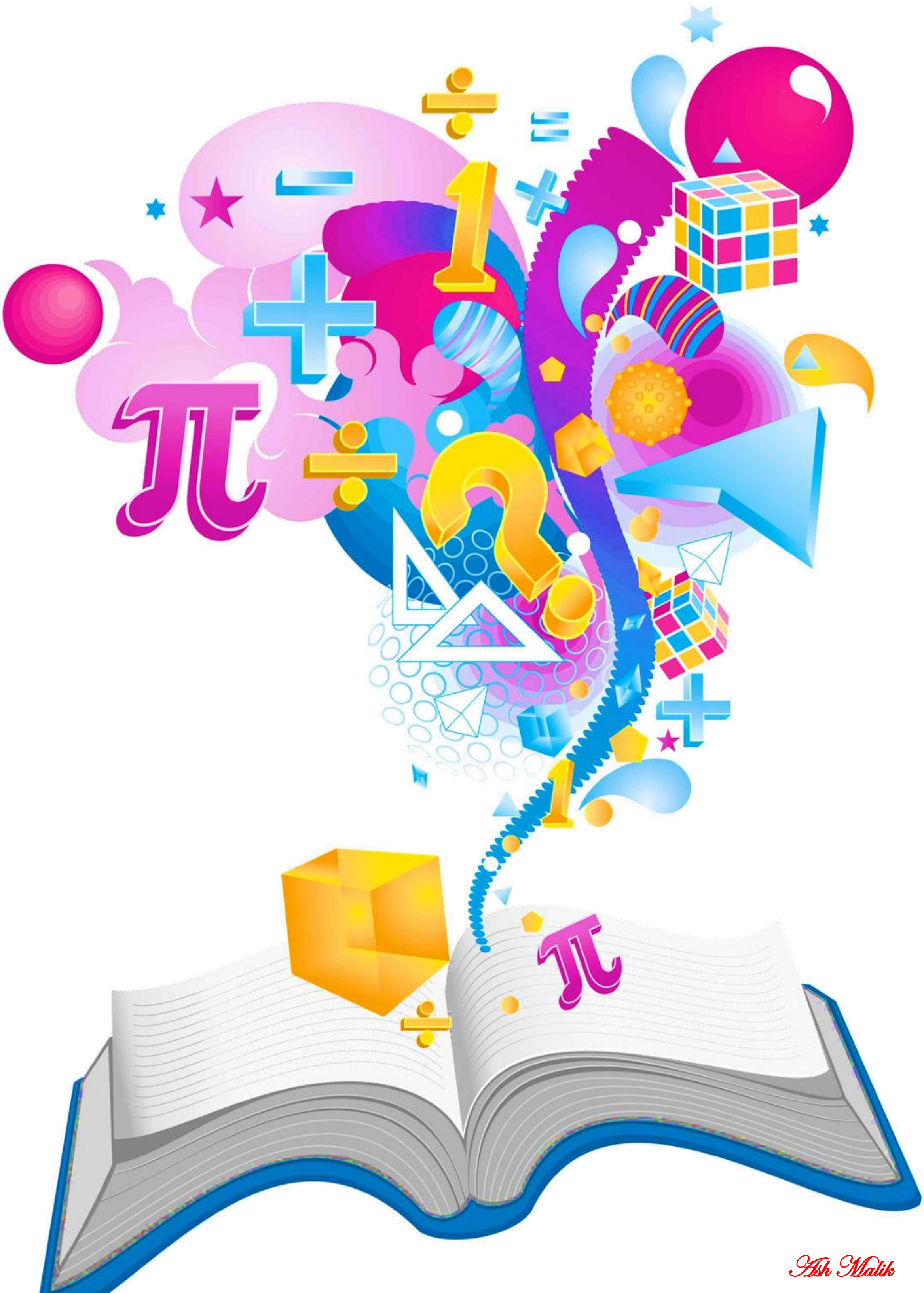
با این حال، از قبل می‌دانیم که ریشه‌های این چندجمله‌ای $e$ و $\pi$ هستند که هر دو عدد متعالی‌اند، پس حداقل یکی از ضرایب باید گنگ باشد. می‌دانیم که ضریب پیشرو، گویا است. پس یکی از (یا هر دو) ضرایب باقی‌مانده گنگ هستند.

*گاهی یک اثبات تنها یک تذکر به ما می‌دهد!*

**مرجع:**

https://medium.com/mathadam/either-e-%CF%80-or-e%CF%80-might-be-rational-but-not-both-a670cb164c07

# مقالات علمی



Ash Malik

# ۱۴ روش برای کاشی کردن یک مستطیل


**مترجم: مریم خلج**

دانشجوی دکتری هندسه توپولوژی، دانشگاه شهید بهشتی


## ۱. مقدمه

بروین[۱] دربارهٔ بسته‌بندی آجرهای $n$-بعدی به‌صورت یک جعبهٔ $n$-بعدی، نتیجه‌ای را ثابت کرده است. در حالت $n=۲$، اگر مستطیل $a\times b$ توسط مستطیل‌های $c\times d$ کاشی شود، آنگاه بنا به این نتیجه، هر یک از $c$ و $d$ مقسوم‌علیه یکی از $a$ و $b$ است. منظور از کاشی‌کاری[۲]، پوششی از مجموعه‌هایی است که نقاط درونی آن‌ها دوبه‌دو مجزا است. تعمیمی از اثبات بروین منجر به قضیهٔ کلی‌تر زیر می‌شود که در شکل ۱ نشان داده شده است. این قضیه به نتیجهٔ او دربارهٔ آجرها اشاره دارد (در حالت $n=۲$، هر ضلع جعبه بر $c$ (به‌ترتیب $d$) تقسیم می‌شود).

**قضیهٔ ۱.** هرگاه یک مستطیل توسط مستطیل‌هایی کاشی شود که هر کدام دارای حداقل یک ضلع با طول صحیح است، آنگاه مستطیل کاشی‌شده دارای حداقل یک ضلع با طول صحیح است.

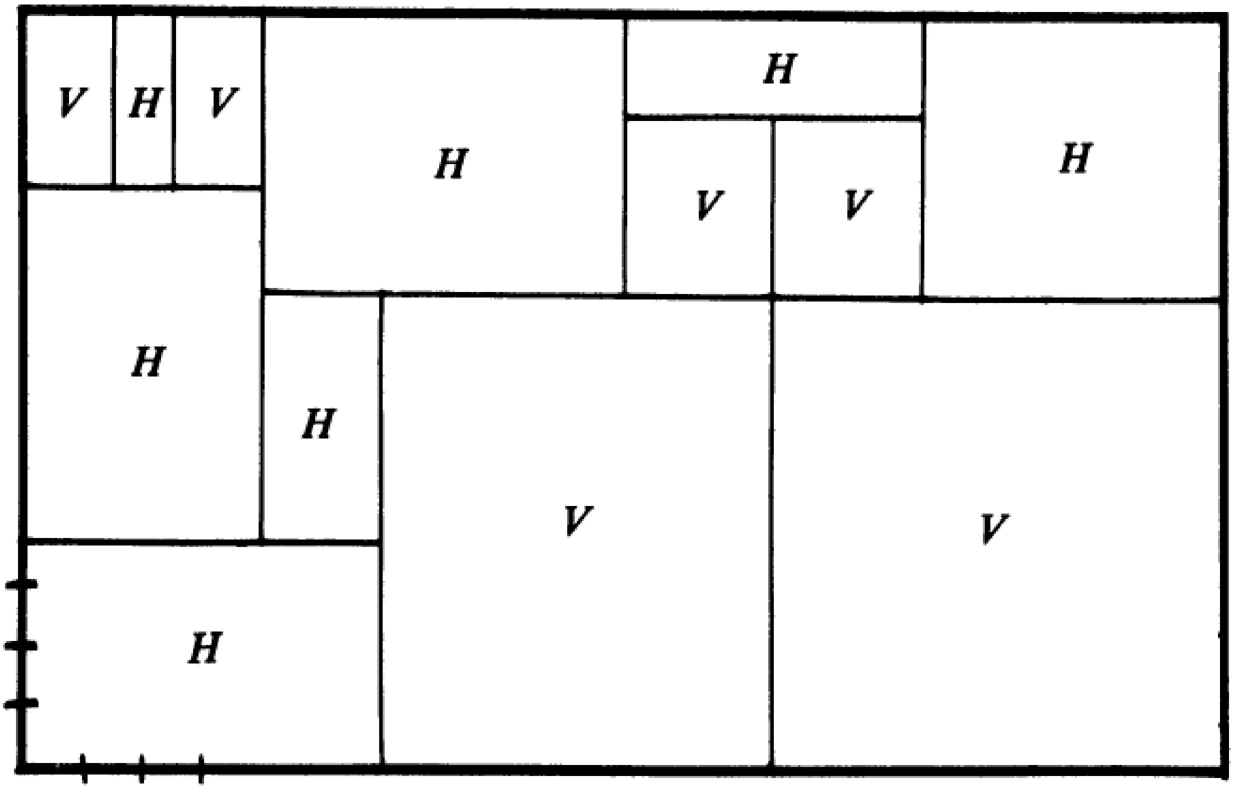
در نشست تابستانی انجمن ریاضی آمریکا در سال ۱۹۸۵ در لارامی، وایومینگ، هیو مونتگومری[۳] با استفاده از انتگرال‌های دوگانه به این قضیه و اثبات آن اشاره کرد، به امید آنکه مشوق کاوشی برای اثبات‌های مقدماتی بیشتری باشد. او موفق شد چراکه اثبات‌های بسیاری از کشورهای مختلف در شرف ارائه بودند. درحقیقت تنوع تکنیک‌های ارائه‌شده قابل توجه است. پاول اردوش اشاره کرده: «خداوند کتابی نامتناهی از قضایا دارد که در آن بهترین اثبات‌ها نوشته شده است.» به هیچ‌وجه روشن نیست که کدام‌یک از اثبات‌هایی که در ادامه آمده، بهترین است (معیار درج اثبات‌ها در کتاب خداوند در حال حاضر در دسترس نیست!). شاید هیچ‌یک از این اثبات‌ها در کتاب نباشد، و هنوز 'بهترین' اثبات کشف نشده باشد. حتی اگر سادگی به‌عنوان معیاری در نظر گرفته شود، به‌طور کامل مشخص نیست که کدام اثبات برنده می‌شود. به نظر می‌رسد که اثبات‌های تختهٔ شطرنجی و گراف دوبخشی نامزدهای اول باشند. اگر توانایی حصول نتایج کلی‌تر به‌عنوان معیار لحاظ شود، وضعیت پیچیده می‌شود. صورت‌های مختلف این قضیه روی استوانه و چنبره، در ابعاد بالاتر و برای کاشی‌کاری‌های چندگانه برقرار است، اما هیچ‌یک از اثبات‌ها از لحاظ قابلیتِ تعمیم یافتن بهترین نیست. ممکن است خوانندگان پیش از مطالعهٔ بخش ۳، از تلاش برای پیش‌بینی اینکه کدام اثبات به احتمال زیاد قابل تعمیم است، لذت ببرند.

ماکس زرن[۴] اشاره کرده است که در سال ۱۹۰۳، دِهن[۵] سؤالات مشابهی را مدنظر قرار داد. دِهن به‌عنوان نتیجه‌ای از تحقیقی متفاوت

---

۱ Bruijn
۲ tiling
۳ Hugh Montgomery
۴ Max Zorn
۵ Dehn

ثابت کرد که اگر یک مستطیل همانند قضیهٔ ۱ کاشی شود، آنگاه طول یکی از اضلاع آن عددی گویا است.




شکل ۱. مثالی از یک کاشی‌کاری که در آن هر کاشی دارای حداقل یک ضلع با طول صحیح است. پهنای کاشی‌های "H" و ارتفاع کاشی‌های "V" صحیح است.

## ۲. برهان‌ها

پهنا و ارتفاع یک مستطیل، به‌ترتیب بُعد افقی و بُعد عمودی آن را مشخص می‌کند. فرض کنید که یک کاشی‌کاری مانند قضیهٔ ۱ داده شده باشد، مستطیل مرجع را با $R$ نشان می‌دهیم. کاشی‌هایی را که دارای پهنای صحیح هستند، $H$-کاشی (کاشی افقی) و سایر کاشی‌ها را که لزوماً دارای ارتفاع صحیح هستند، $V$-کاشی (کاشی عمودی) می‌نامیم. اغلب مستطیل $R$ را در جایگاه استاندارد در نظر می‌گیریم، یعنی گوشهٔ پایین سمت چپ در مبدأ قرار دارد و اضلاع آن موازی محورهای مختصات در صفحهٔ $xy$ است.

(۱) انتگرال دوگانهٔ مختلط (تعمیم روش اصلیِ بروین). ابتدا توجه کنید که $\int_a^b \sin ۲\pi x\, dx = ۰$ اگر و تنها اگر یکی از اعداد $a \pm b$ صحیح باشد و $\int_a^b \cos ۲\pi x\, dx = ۰$ اگر و تنها اگر یکی از اعداد $a - b$ یا $a + b - ۱/۲$ صحیح باشد، بنابراین برای هر مستطیل $T$ در صفحهٔ $xy$ که اضلاع آن موازی محورهای مختصات است، داریم

$$\iint_T e^{۲\pi i(x+y)}\, dA = ۰$$

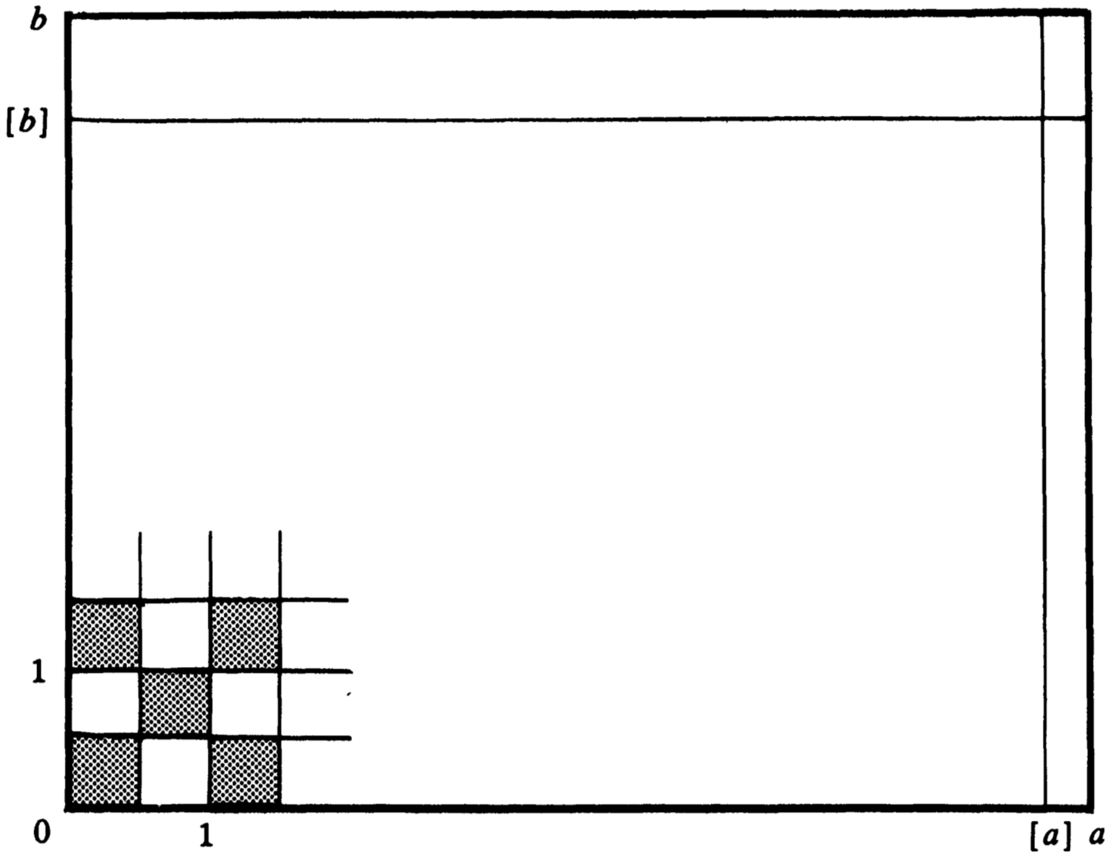
اگر و تنها اگر طول حداقل یکی از اضلاع $T$ عددی صحیح باشد. حال، فرض قضیه ایجاب می‌کند تا این انتگرال دوگانه روی هر کاشی صفر شود و لذا بنا به جمع‌پذیری انتگرال، مقدار این انتگرال دوگانه روی $R$، صفر است. درنتیجه باید پهنا یا ارتفاع $R$ عددی صحیح باشد. ■

(۲) انتگرال دوگانهٔ حقیقی (دگرگون‌شدهٔ اثبات انتگرال دوگانهٔ مختلط). فرض کنید $R$ یک مستطیل $a \times b$ در جایگاه استاندارد باشد. همانند اثبات قبل، برای هر کاشی $T$ داریم $\iint_T \sin ۲\pi x \sin ۲\pi y\, dA = ۰$. بنابراین انتگرال دوگانه روی $R$ صفر می‌شود و چون یک گوشهٔ $R$ در $(۰,۰)$ قرار دارد، لذا حداقل یکی از اعداد $a$ یا $b$ عددی صحیح است (می‌توان از توابع دیگر مانند $(x - [x] - ۱/۲)$ یا $(y - [y] - ۱/۲)$ به‌عنوان تابع زیر انتگرال استفاده کرد). ■

(۳) تختهٔ شطرنجی (ریچارد راکبرگ[۱]، دانشگاه واشنگتن؛ شرمن استاین[۲]). مستطیل $R$ را در جایگاه استاندارد در نظر بگیرید. شبکهٔ مربعی تولیدشده توسط یک مربع $(۱/۲) \times (۱/۲)$ را که گوشهٔ پایین سمت چپ آن در $(۰,۰)$ قرار دارد، به‌صورت یک صفحهٔ شطرنجی با سیاه / سفید رنگ کنید. چون هر کاشی دارای ضلعی با طول صحیح است، پس هر کدام شامل تعدادی مساوی از مربعات سیاه و سفید

[۱] Richard Rochberg

[۲] Sherman K. Stein




شکل ۲. اگر هیچ‌یک از $a$ یا $b$ عدد صحیح نباشد، آنگاه گوشهٔ بالا سمت راست، تعداد مربع سیاه بیشتر از سفید دارد.

خواهدبود. بنابراین در مستطیل $R$ نیز تعداد مربعات سیاه و سفید برابر است. لذا $R$ باید دارای ضلعی با طول صحیح باشد زیرا در غیر این صورت، می‌توان آن را به چهار بخش تقسیم کرد (شکل ۲ را ببینید) که در سه بخش آن تعداد مربعات سیاه و سفید برابر است، ولی در بخش چهارم این اتفاق نمی‌افتد (این اثبات با استفاده از تابع $(-۱)^{[۲y]}(-۱)^{[۲x]}$ به‌عنوان تابع زیر انتگرال در اثبات قبل نیز نتیجه می‌شود). ■

(۴) شمارش مربعات (ایمره روژا[1]، مؤسسهٔ ریاضیاتِ آکادمیِ علومِ مجارستانی، بوداپست؛ پیتر گیلبرت[2]، شرکت تجهیزات دیجیتال، نشوا، نیو همپشایر). مستطیل $R$ را در جایگاه استاندارد در نظر بگیرید و فرض کنید $\{x_i\}$ (به‌ترتیب $\{y_j\}$) مجموعهٔ $x$-مختصات خطوط مرزی عمودی ($y$-مختصات خطوط مرزی افقی) کاشی‌ها باشد. با انتقال تمام پاره‌خط‌های کاشی‌کاریِ مستطیل $R$ به روش زیر، یک کاشی‌کاری کمکی (از مستطیل جدید $R'$) می‌سازیم. اگر پاره‌خطی روی خط متناظر با مقدار صحیحی از $x_i$ یا $y_j$ قرار داشت، آن را حرکت ندهید. اگر پاره‌خطی عمودی روی $x = x_i$ برای عدد غیرصحیح $x_i$ واقع بود، آن را تا خط $x = [x_i] + ۱/۲$، به‌سمت چپ یا راست انتقال دهید. به‌طور مشابه، پاره‌خط‌های افقی روی $y = y_j$ را برای عدد غیرصحیح $y_j$، تا $y = [y_j] + ۱/۲$ به‌سمت بالا یا پایین منتقل کنید. ممکن است این ساختار باعث کاهش تعداد کاشی‌ها شود، اما این موضوع اهمیتی ندارد.

اکنون اگر حکم قضیه درست نباشد، آنگاه $R'$ مستطیلی در جایگاه استاندارد است که طول و عرض آن برابر با نصف عددی فرد است. بنابراین، تعداد مربعات (رنگ‌نشده) در تختهٔ شطرنجی معرفی‌شده در اثبات قبل برای $R'$، فرد است. اما فرض قضیه ایجاب می‌کند که تعداد مربعات در هر کاشی از $R'$ زوج باشد و این تناقض است. ■

(۵) چندجمله‌ای‌ها (آدریان دوادی[3]، مؤسسهٔ آموزش عالی، پاریس). $R$ را در جایگاه استاندارد قرار می‌دهیم و یک کاشی‌کاری کمکی مشابه اثبات قبل می‌سازیم. پارامتر $t$ را انتخاب می‌کنیم و تنها پاره‌خط‌هایی را انتقال می‌دهیم که دارای مختصات غیرصحیح هستند. پاره‌خط‌های عمودی روی $x = x_i$ را به‌سمت راست تا $x = x_i + t$ و پاره‌خط‌های افقی را به‌سمت بالا تا $y = y_j + t$ انتقال می‌دهیم. اگر $t$ را از بازهٔ به اندازهٔ کافی کوچک $[۰, \varepsilon]$ انتخاب کنیم، آنگاه این ساختار منجر به یک کاشی‌کاری از $R'$ می‌شود که تعداد کاشی‌های آن با کاشی‌کاری $R$ برابر است.

حال اگر حکم برقرار نباشد، آنگاه $R'$ یک مستطیل $(a + t) \times (b + t)$ است که مساحت آن یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم برحسب $t$ است. اما بنا به فرض قضیه، هر کاشی $w \times h$ در $R$، به یک کاشی با یکی از فرم‌های $w \times (h \pm t)$، $(w \pm t) \times h$ یا $w \times h$ تبدیل

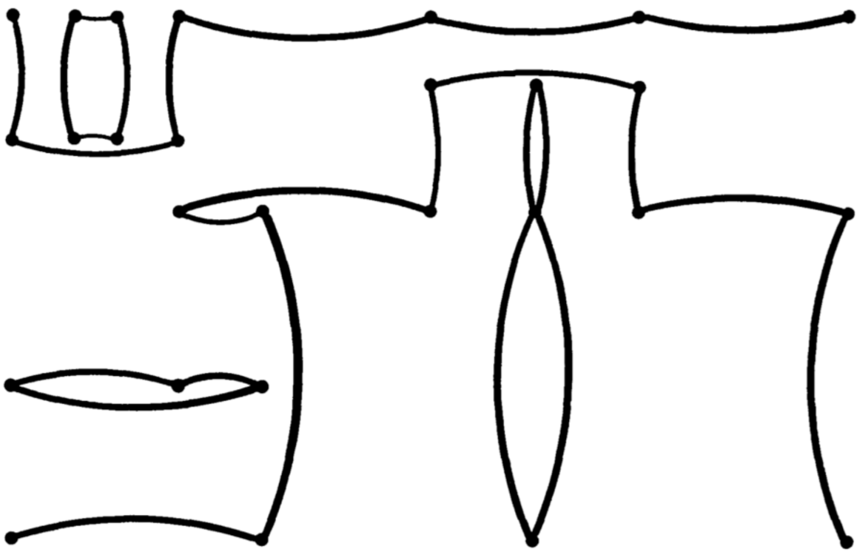
---

[1] Imre Z. Ruzsa [2] Peter Gilbert [3] Adrien Douady

می‌شود. در همهٔ حالت‌ها، مساحت کاشی اصلاح‌شده یک تابع ثابت یا خطی برحسب $t$ است و به‌طور مشابه همین موضوع برای مساحت $R'$ برقرار است. پس با نمایش درجهٔ دوم از مساحت به تناقض می‌رسیم، زیرا $t$ هر مقداری از یک بازه را می‌تواند اختیار کند. ■

(۶) اعداد اول (رافائل رابینسون[۱]، دانشگاه کالیفورنیا، برکلی). ادعا می‌کنیم که برای هر عدد اول $p$، ارتفاع یا پهنای $R$ به فاصلهٔ حداکثر $۱/p$ از عددی صحیح قرار دارد، در این صورت یکی از آن‌ها باید صحیح عددی باشد. برای اثبات این ادعا، تمام کاشی‌کاری را از هر طرف با مقیاس $p$ بزرگ کنید. در کاشی‌کاری بزرگ‌شده، تمام گوشه‌های کاشی‌ها با مختصات $(x, y)$ را توسط $([x], [y])$ جایگزین کنید و این کاشی‌کاری جدید را در نظر بگیرید. بدین‌ترتیب به یک مستطیل با اضلاع صحیح می‌رسیم که توسط مستطیل‌هایی با اضلاع صحیح کاشی شده است و هر یک از این کاشی‌ها ضلعی دارد که مضربی از $p$ است. بنابراین مساحت مستطیل بزرگِ به‌دست‌آمده، مضربی از $p$ بوده و لذا باید طول یکی از اضلاع آن مضربی از $p$ باشد. به‌علاوه، اختلاف ابعاد این مستطیل با ابعاد مستطیل بزرگ‌شده حداکثر یک واحد است. درنتیجه $R$ دارای ضلعی است که در فاصله‌ای کمتر از $۱/p$ تا عددی صحیح قرار دارد. ■

(۷) مسیر اویلری (مایکل پترسن[۲]، دانشگاه وارویک، انگلیس). فرض کنید $\Gamma$ گرافی باشد که رئوس آن، گوشه‌های تمام کاشی‌ها است. دو رأس در این گراف به هم متصل هستند هرگاه متناظر با دو سر یک ضلع افقی از یک $H$-کاشی یا یک ضلع عمودی از یک $V$-کاشی باشند. ممکن است یال‌های چندگانه نیز موجود باشد. برای آنکه تصویر واضح‌تری داشته باشید (و ببینید که $\Gamma$ مسطح است) یال‌ها را در جهتِ کاشیِ معرف آن، کمی خم کنید (شکل ۳ را ببینید). تمام رئوس (به‌جز گوشه‌های مستطیل مرجع) روی ۲ یا ۴ مستطیل واقع شده‌اند و لذا روی ۲ یا ۴ یال در گراف $\Gamma$ قرار دارند. رئوس گوشه‌ای روی ۱ یال واقع شده‌اند. درنتیجه یک گشت[۳] در طول یال‌ها که از یک گوشه آغاز می‌شود و هیچ یال تکراری ندارد، پایان نمی‌یابد مگر به گوشهٔ دیگر برسد که این موضوع قضیهٔ ۱ را اثبات می‌کند. ■



شکل ۳. گراف اویلری $\Gamma$ به دست آمده از کاشی‌کاری از شکل ۱

(۸) گراف دوبخشی (دگرگون‌شدهٔ اثبات مسیر اویلری). $R$ را در جایگاه استاندارد در نظر بگیرید. فرض کنید $S$ مجموعهٔ گوشه‌های کاشی‌ها باشد که هر دو مؤلفهٔ مختصاتی آن عددی صحیح است و $T$ مجموعهٔ تمام کاشی‌هاست. با اتصال هر نقطه از $S$ به تمام کاشی‌های متناظر آن، یک گراف دوبخشی روی $S \cup T$ بسازید. تعداد یال‌ها زوج خواهد بود چراکه هر کاشی ۰، ۲ یا ۴ رأس در $S$ دارد. اما هر نقطه‌ای در $S$ که گوشهٔ $R$ نیست، روی ۲ یا ۴ کاشی واقع است. چون $(۰,۰)$ نیز که فقط روی یک کاشی قرار دارد، متعلق به $S$ است، باید نقطهٔ دیگری در $S$ موجود باشد که روی تعداد فردی از کاشی‌ها واقع است. این اتفاق تنها زمانی رخ می‌دهد که گوشهٔ دیگری از $R$ درون $S$ باشد، یعنی باید پهنا یا ارتفاع $R$ عددی صحیح باشد. ■

(۹) استقرا (رافائل رابینسون). این اثبات به کمک استقرا روی تعداد $H$-کاشی‌های موجود در کاشی‌کاری‌ای انجام می‌شود که در آن پهنای هر $H$-کاشی و ارتفاع هر $V$-کاشی برابر با ۱ است. بررسی این حالت کفایت می‌کند چراکه می‌توان هر کاشی را در جهت تعیین‌شده، تقسیم کرد. $H$-کاشی $T_{\cdot}$ را انتخاب کنید (اگر این کاشی وجود نداشته باشد، نتیجه بدیهی خواهد بود). اگر $H$-کاشی‌هایی موجود باشند که مرز پایینی آن‌ها با مرز بالایی $T_{\cdot}$ در پاره‌خطی مشترک است، یکی را انتخاب کنید و $T_۱$ بنامید. در غیر این صورت، تنها $V$-کاشی‌ها دارای این اشتراک هستند و می‌توانیم $T_{\cdot}$ را ۱ واحد در جهت عمودی گسترش دهیم. با این کار، تعداد $H$-کاشی‌ها افزایش

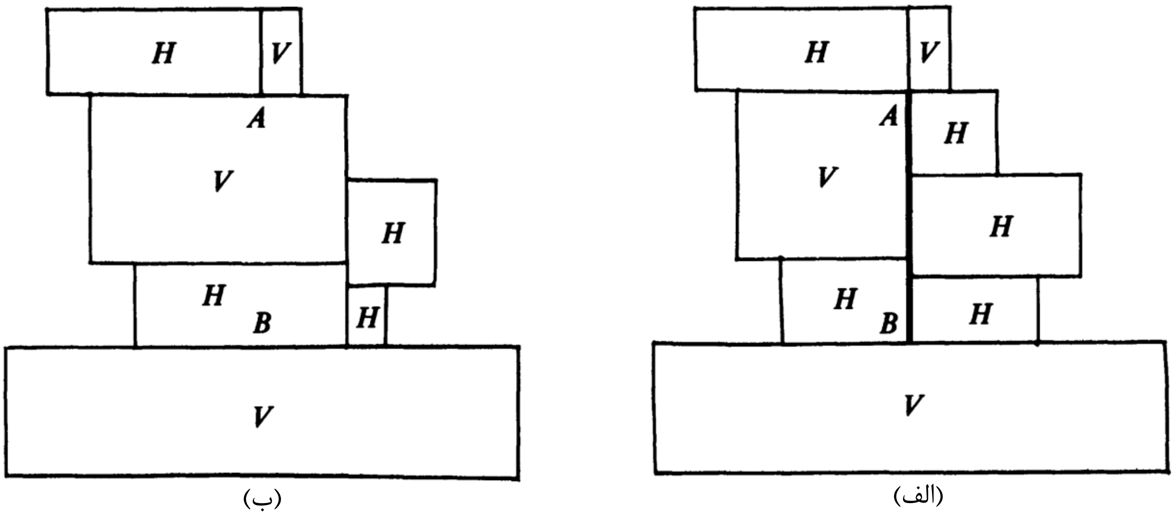
[۱] Raphael Rabinson [۲] Michael S. Paterson [۳] walk

نمی‌یابد و ارتفاع کاشی‌های عمودی بریده‌شده، همچنان ۱ است. به گسترش $T_0$ در راستای عمودی تا جایی ادامه می‌دهیم که به ضلع بالایی مستطیل برسیم یا انتخاب یک $H$-کاشی هم‌مرز $T_1$ ممکن باشد. به‌طور مشابه، از $T_1$ به‌سمت بالا ادامه می‌دهیم تا به $T_2$ و الی آخر برسیم. بدین‌ترتیب، زنجیر $T_0$، $T_1$، ...، $T_m$ از $H$-کاشی‌ها را داریم که از $T_0$ تا بالای $R$ واقع شده‌اند. به‌طور مشابه، می‌توانیم از $T_0$ به‌سمت پایین حرکت کنیم و به زنجیر

$$T_{-n}, \dots, T_{-1}, T_0, T_1, \dots, T_m$$

از $H$-کاشی‌ها برسیم که از پایین تا بالا کشیده شده است. این کاشی‌ها را بردارید و کاشی‌های باقی‌مانده را با هم بلغزانید تا به یک مستطیل با تعداد کمتری $H$-کاشی برسید. استفاده از استقرا در این مستطیل کوچک‌تر منجر به برقراری حکم برای مستطیل اصلی می‌شود. ■

(۱۰) استقرا، دگرگون‌شده (ریچارد بیشپ[1]، دانشگاه ایلینویز؛ استن واگن[2]، کالج اسمیت، انگلیس). در یک کاشی‌کاری، پاره‌خط عمودی ماکسیمالی را که نقاط درونی آن توسط هیچ پاره‌خط افقی قطع نشده باشد، یک $V$-اتصال می‌نامیم. به‌طور مشابه $H$-اتصال را تعریف می‌کنیم. یک اتصال، تقلیل‌پذیر[3] است اگر یک $V$-اتصال (یا $H$-اتصال) باشد که در یک سمت خود، تنها $H$-کاشی (یا $V$-کاشی) داشته باشد. در کاشی‌کاری شکل ۱ اتصال‌های تقلیل‌پذیر بسیاری وجود دارد. برای مثال، $V$-اتصالی که در مرکز کاشی‌کاری، $V$-کاشی بزرگ را از دو $H$-کاشی سمت چپش جدا می‌کند. تنها کافی است نشان دهیم که تمام کاشی‌کاری‌ها دارای یک اتصال تقلیل‌پذیر هستند. در این صورت، فرض می‌کنیم که یک $V$-اتصال تقلیل‌پذیر داریم که از سمت راست تنها با $H$-کاشی‌ها هم‌مرز است. از بین این $H$-کاشی‌ها، پهنای باریک‌ترین را $w$ می‌نامیم. سپس تمام کاشی‌هایی را که از سمت چپ با این $V$-اتصال هم‌مرز هستند، به اندازهٔ $w$ از سمت راست گسترش می‌دهیم (شکل ۴ را ببینید). چون ارتفاع‌ها تغییر نمی‌کنند $V$-کاشی‌ها، $V$-کاشی باقی می‌مانند و چون پهناها به اندازهٔ $w$ کم یا زیاد شده‌اند $H$-کاشی‌ها، $H$-کاشی باقی می‌مانند. اما این گسترش، همان‌طور که برای استقرا به آن نیاز داریم، تعداد کاشی‌ها را حداقل یک واحد کاهش می‌دهد.




شکل ۴. در (الف)، $AB$ یک $V$-اتصال تقلیل‌پذیر است. شکل (ب) کاشی‌کاری بعد از گسترش کاشی‌های سمت چپ $AB$ را نشان می‌دهد.

باید یک اتصال تقلیل‌پذیر موجود باشد، در غیر این صورت،از پایین به بالا زنجیری از $H$-کاشی‌ها وجود دارد که هر کدام توسط یک $H$-اتصال به دیگری متصل است و از چپ به راست نیز یک زنجیر از $V$-کاشی‌ها وجود دارد که توسط $V$-اتصال‌ها متصل هستند. این زنجیرها باید متقاطع باشند و این تقاطع باید اشتراکِ یک $H$-اتصال و $V$-اتصال در نقاط درونی اتصال‌ها باشد و این با تعریف اتصال متناقض است. ■

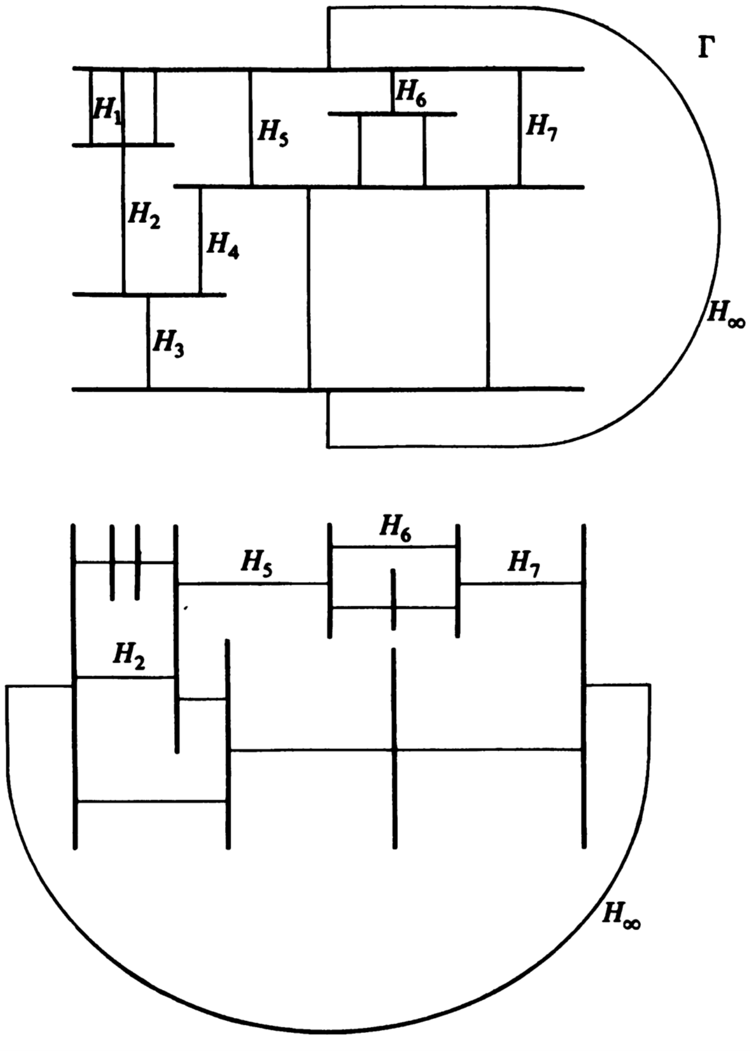
(۱۱) مجموعهٔ برش مینیمال (پل سیمور[4]، مرکز تحقیق ارتباطات بل، نیوجرسی). گراف $\Gamma$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. رئوس آن تمام پاره‌خط‌های افقی در کاشی‌کاری است و دو رأس توسط $m$ یال به هم متصل‌اند اگر $m$ کاشی ($H$-کاشی یا $V$-کاشی) پاره‌خط‌های متناظر را به هم وصل کنند. بیرون $R$ را یک کاشی در نظر می‌گیریم، بنابراین یک یال اضافه می‌شود که رئوس بالا و پایین را به هم وصل می‌کند. کاشی‌کاری موجود منجر به نشاندن $\Gamma$ در صفحه می‌شود چراکه می‌توان از نیمسازهای عمودی کاشی‌ها به‌عنوان یال‌ها استفاده کرد (شکل ۵). یال متناظر با کاشی اضافی را می‌توان به‌صورت شکل ۵ رسم کرد، هرچند طبیعی‌تر بود که با نشاندن این گراف روی سطح یک کره، تقارن حفظ شود.

---

[1] Richard Bishop
[2] Stan Wagon
[3] reducible
[4] Paul Seymour

فرض کنید گراف $\Gamma^*$ دوگان $\Gamma$ باشد، رئوس $\Gamma^*$ وجوه $\Gamma$ هستند و بین دو رأس در $\Gamma^*$ یک یال وجود دارد اگر وجوه متناظر آن‌ها در نشانندهٔ مسطح از $\Gamma$ مجاور باشند. وجوه $\Gamma$ ساختار ساده‌ای دارند: هر وجه از قسمتی از یک پاره‌خط عمودی در کاشی‌کاری - یک $V$-اتصال با توجه به اصطلاحات موجود در اثبات قبلی (شکل ۵ را ببینید) - و تمام کاشی‌های مجاور با آن $V$-اتصال به وجود می آید. اگر دو وجه در $\Gamma$ در طول یک یال برخورد داشته باشند، آنگاه یک کاشی وجود دارد که مرزهای عمودی آن روی $V$-اتصال‌های متناظر با آن وجوه واقع است.

حال فرض کنید که $S$ مجموعهٔ یال‌های متناظر با $H$-کاشی‌ها در $\Gamma$ و یال‌های بیرونی بالا و پایین باشد. اگر حذف $S$ رئوس بالا و پایینی را از هم جدا نکند، آنگاه همان‌طور که انتظار داشتیم، مسیری از بالا به پایین شامل تمام گام‌های عمودی با طول صحیح وجود دارد. در غیر این صورت فرض کنید $S'$ زیرمجموعهٔ مینیمالی از $S$ باشد که حذف آن، بالا و پایین $\Gamma$ را از هم جدا کند و $S^*$ مجموعهٔ یال‌های $\Gamma^*$ متناظر با یال‌های $S'$ باشد. بنا به قضیه‌ای شناخته‌شده دربارهٔ گراف‌های مسطح، $S^*$ یک دور در $\Gamma^*$ است. به‌علاوه، چون باید $S'$ شامل یال‌های بیرونی باشد، $S^*$ مسیری از مرز چپ $R$ به مرز راست آن القا می‌کند که شامل هر گام افقی با طول صحیح است. درنتیجه پهنای مستطیل عددی صحیح است. ■




شکل ۵. نمودار اول گراف $\Gamma$ متناظر با کاشی‌کاری در شکل ۱ را نشان می‌دهد. پاره‌خط‌های افقی رئوس و پاره‌خط‌های عمودی یال‌ها هستند که اگر توسط یک $H$-کاشی ایجاد شده باشند دارای برچسب $H$ هستند. نمودار دوم، گراف دوگان $\Gamma^*$ را با استفاده از $V$-اتصال‌های کاشی‌کاری و پاره‌خط‌های افقی به‌عنوان یال‌ها نمایش می‌دهد. یال‌های $S'$ و $S^*$ متناظر با یک مجموعهٔ برش مینیمال در $\Gamma$، $H_۲$، $H_۵$، $H_۶$، $H_۷$ و $H_\infty$ هستند.

(۱۲) خط رفت و برگشت[۱] (گنادی باخمن[۲]، دانشگاه ایلینویز؛ میکالیس یاناکاکیس[۳]، آزمایشگاه بل، نیوجرسی). فرض کنید $R$ مستطیلی $a \times b$ در جایگاه استاندارد و $b$ عددی غیرصحیح باشد. همچنین فرض کنید $\{R_i\}$ مجموعهٔ کاشی‌ها باشد، ولی پاره‌خطی که مرز پایینی هر یک را می‌سازد، حذف شده باشد. $a_i$ و $b_i$ را به‌ترتیب پهنا و ارتفاع $R_i$ در نظر بگیرید. تابع $f: [۰, b] \to [۰, a]$ را طوری تعریف

---

۱ Sweep-line
۲ Gennady Bachman
۳ Mihalis Yannakakis

کنید که $f(t)$ برابر با مجموع تمام $a_i$هایی باشد که $R_i$ خط $y = t$ را قطع کند و $y$-مختصات مرز بالایی $R_i$ عددی صحیح نباشد. در این صورت داریم $f(\cdot) = \cdot$ و به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که هرگاه مقدار $f$ تغییر کند، این کار به‌گونه‌ای انجام می‌شود که یک عدد صحیح باقی می‌ماند؛ زمانی که این 'خط رفت و برگشت' از روی یک خط افقی در کاشی‌کاری عبور می‌کند، اختلاف افزایش‌ها و کاهش‌های $f$ یک عدد صحیح است. بنابراین $f(b)$ عددی صحیح است، اما چون $b$ غیرصحیح است $f(b)$ برابر با مجموع پهنای تمام کاشی‌هایی است که بالای مستطیل را لمس می‌کنند، یعنی $f(b) = a$. ■

(۱۳) توابع پله‌ای (ملوین هوچستر[۱]، دانشگاه میشیگان؛ آتیلا ماته[۲]، کالج بروکلین). مستطیل را در جایگاه استاندارد قرار دهید. سپس گراف $\Gamma$ را طوری تعریف کنید که رئوسش شامل تمام نقاطی روی محور $x$ها باشد که حداقل یک کاشی دارای مرزی عمودی در این مقدار است (این مقادیر را با ترتیب صعودی $x_i$ بنامید) و همچنین شامل تمام نقاط روی محور $y$ها باشد که مختصات بالا یا پایین حداقل یک کاشی $(y_i)$ است. دو رأس روی محور $x$ها را به هم وصل کنید اگر یک $H$-کاشی آن بازه را بپوشاند و دو رأس روی محور $y$ها را به هم وصل کنید اگر یک $V$-کاشی آن بازه را بپوشاند (شکل ۶ را ببینید). هدف آن است که نشان دهیم مبدأ در مؤلفهٔ همبندی یکسانی با $(a,\cdot)$ یا $(\cdot,b)$ از $\Gamma$ قرار دارد.


| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | −4 | 0 | 0 | 8 | −8 | 0 |
| −4 | 0 | 4 | 0 | 0 | −8 | 8 | 0 |
| 4 | 0 | −4 | 0 | 0 | 8 | −8 | 0 |
| −3 | 0 | 3 | 0 | 0 | −6 | 6 | 0 |
| 3 | 0 | −3 | 0 | 0 | 6 | −6 | 0 |

شکل ۶. گراف (با مؤلفه‌های شماره‌گذاری‌شده از صفر تا ۴) و شبکهٔ اثبات تابع پله‌ای، با استفاده از کاشی‌کاری شکل ۱

به روشی دلخواه، اعداد متمایزی را به مؤلفه‌های همبندی $\Gamma$ نسبت دهید. سپس تابع پله‌ای $f$ روی $[\cdot,a]$ را طوری تعریف کنید که مقدار آن روی بازهٔ $(x_i,x_{i+1})$ برابر با شمارهٔ مؤلفهٔ شامل $x_i$ منهای شمارهٔ مؤلفهٔ شامل $x_{i+1}$ باشد. توجه کنید که مجموع مقادیر $f$ روی بازه‌های بین دو رأس مجاور صفر است. به‌طور مشابه تابع $g$ را روی $[\cdot,b]$ تعریف کنید. حال با رسم خطوط $x = x_i$ و $y = y_i$، کاشی‌کاری را به یک شبکه اصلاح کنید و مشاهده کنید که درون هر مستطیل از این شبکه، $f(x)g(y)$ ثابت است. به‌علاوه، مجموع

[۱] Melvin Hochster
[۲] Attila Máté

این حاصل‌ضرب‌ها روی تمام مستطیل‌های مشمول در یک کاشی برابر با صفر است (شکل ۶ را ببینید). بنابراین این مجموع روی تمام مستطیل‌های شبکه برابر با صفر است. اما این مجموع برابر با حاصل‌ضرب $\sum\left\{f(I)\right.$: $I$ یک بازه بین رئوس متوالی روی محور $x$ها است$\left.\right\}$ در $\sum\left\{g(J)\right.$: $J$ یک بازه بین رئوس متوالی روی محور $y$ها است$\left.\right\}$ است، درنتیجه یکی از این مجموع‌ها باید صفر باشد، پس مبدأ و یکی از دو نقطهٔ $(a,\cdot)$ یا $(\cdot,b)$ در یک مؤلفه قرار دارند. ■

(۱۴) لم اسپرنر (جیمز اشمرل[۱]، دانشگاه کانکتیکات). فرض کنید که حکم نادرست باشد و $R$ در جایگاه استاندارد قرار داشته باشد. با رسم قطر هر کاشی، $R$ را مثلث‌بندی کنید. سپس تمام رئوس در کاشی‌کاری را به‌صورت زیر نام‌گذاری کنید:

نقطهٔ $(x,y)$ را $A$ بنامید اگر $x\in\mathbb{N}$، $B$ بنامید اگر $x\notin\mathbb{N}$ ولی $y\in\mathbb{N}$، $C$ بنامید اگر هیچ‌یک از $x$ و $y$ عدد صحیح نباشند. بنا به یکی از صورت‌های لم اسپرنر، تعداد مثلث‌های $ABC$ فرد است، اما بنا به فرض هیچ مثلثی با این نام وجود ندارد که این تناقض است. ■

## ۳. تعمیم‌ها

ممکن است در اولین برخورد با این برهان‌ها، تفاوت چندانی مشاهده نکنید، چراکه اجزای بسیاری از آن‌ها مشابه است. این دیدگاه در بعضی موارد صادق است، اثبات انتگرال دوگانهٔ حقیقی حالت خاصی از اثبات انتگرال دوگانهٔ مختلط است و اثبات تختهٔ شطرنجی یک گسسته‌سازی از اثبات انتگرال دوگانهٔ حقیقی است که در آن به‌جای حاصل‌ضرب سینوس‌ها از توابعی با برد $\{\pm1\}$ استفاده شده است. همچنین دو اثبات استقرایی بسیار به یکدیگر مرتبط هستند، همان‌طور که اثبات‌های مسیر اویلری و گراف دوبخشی. اما بررسی تعمیم‌های متنوع، تفاوت‌های اثبات‌های دیگر را آشکار می‌کند (پیوست را ببینید).

یک تعمیم طبیعی از قضیهٔ ۱ حالتی است که اعداد صحیح با گروه‌های دیگری از اعداد حقیقی جایگزین می‌شود. یک کاشی‌کاری از $R$ را در نظر بگیرید که در آن هر کاشی دارای ضلعی تعیین‌شده[۲] باشد که طول آن لزوماً عددی صحیح نیست (یک کاشی با پهنای (ارتفاع) تعیین‌شده، یک $H$-کاشی ($V$-کاشی) نامیده می‌شود). در اینجا باید نشان دهیم که پهنای $R$ در زیرگروه (جمعی) تولیدشده توسط پهنای $H$-کاشی‌ها یا ارتفاع آن در گروه تولیدشده توسط ارتفاع $V$-کاشی‌ها قرار دارد. برای مثال، اگر هر کاشی دارای پهنایی صحیح یا ارتفاعی جبری باشد، آنگاه $R$ دارای پهنای صحیح یا ارتفاع جبری است. اثبات‌های مسیر اویلری، مجموعهٔ برش مینیمال، خط رفت و برگشت، تابع پله‌ای، چندجمله‌ای و همچنین استقرای دگرگون‌شده، همگی بدون هیچ اصلاحی برای این تعمیم برقرار هستند. اثبات گراف دوبخشی در صورتی کار می‌کند که $S$، مجموعهٔ گوشه‌های کاشی‌هایی باشد که هر دو مؤلفهٔ مختصاتی آن‌ها در گروه‌های متناظر قرار گیرد. می‌توان اثبات استقرایی را نیز در این حالت به کار برد، اگر تنها بخشی از کاشی‌های افقی انتخابی را که متناظر با پهنای باریک‌ترین عضو است برداشته شود، بنابراین تعداد کاشی‌های افقی کاهش می‌یابد.

توجه کنید که هرچند اثبات‌های مسیر اویلری، مجموعهٔ برش مینیمال و تابع پله‌ای با پیدا کردن مسیری در گرافی معین کار خواهند کرد، اما تفاوت‌هایی اساسی وجود دارد. گراف‌ها در دو اثبات اول، مسطح هستند درحالی‌که ممکن است اثبات تابع پله‌ای، گرافی غیرمسطح بسازد. در بین این سه، اثبات مسیر اویلری تنها برهانی است که نشان می‌دهد مسیری از اضلاع صحیح کاشی‌ها از یک ضلع مستطیل به ضلع روبه‌روی آن وجود دارد. هرچند به نظر می‌رسد که اثبات تابع پله‌ای توانایی کشف 'مسیرهایی' را دارد که دیگر اثبات‌ها فاقد آن هستند (شکل ۷ را ببینید).

روژا اشاره کرده است که اگر فرض شود که کاشی‌های دارای یک گوشه در $\mathbb{Z}^2$، دارای ضلعی با طول صحیح هستند، قضیهٔ ۱ همچنان برقرار است (در اینجا فرض می‌کنیم که $R$ در جایگاه استاندارد قرار دارد). روش دیگری برای بیان این شرط به این صورت است: هر کاشی دارای صفر، ۲ یا ۴ گوشه در $\mathbb{Z}^2$ باشد. اثبات شمارش مربعات روژا، اثبات گراف دوبخشی و اثبات چندجمله‌ای بدون هیچ اصلاحی منجر به این نتیجه می‌شوند. اثبات‌های تابع پله‌ای، مسیر اویلری و همین‌طور اثبات لم اسپرنر نیز کار می‌کنند (برای دومی تنها رئوس موجود در $\mathbb{Z}^2$ را در نظر بگیرید).

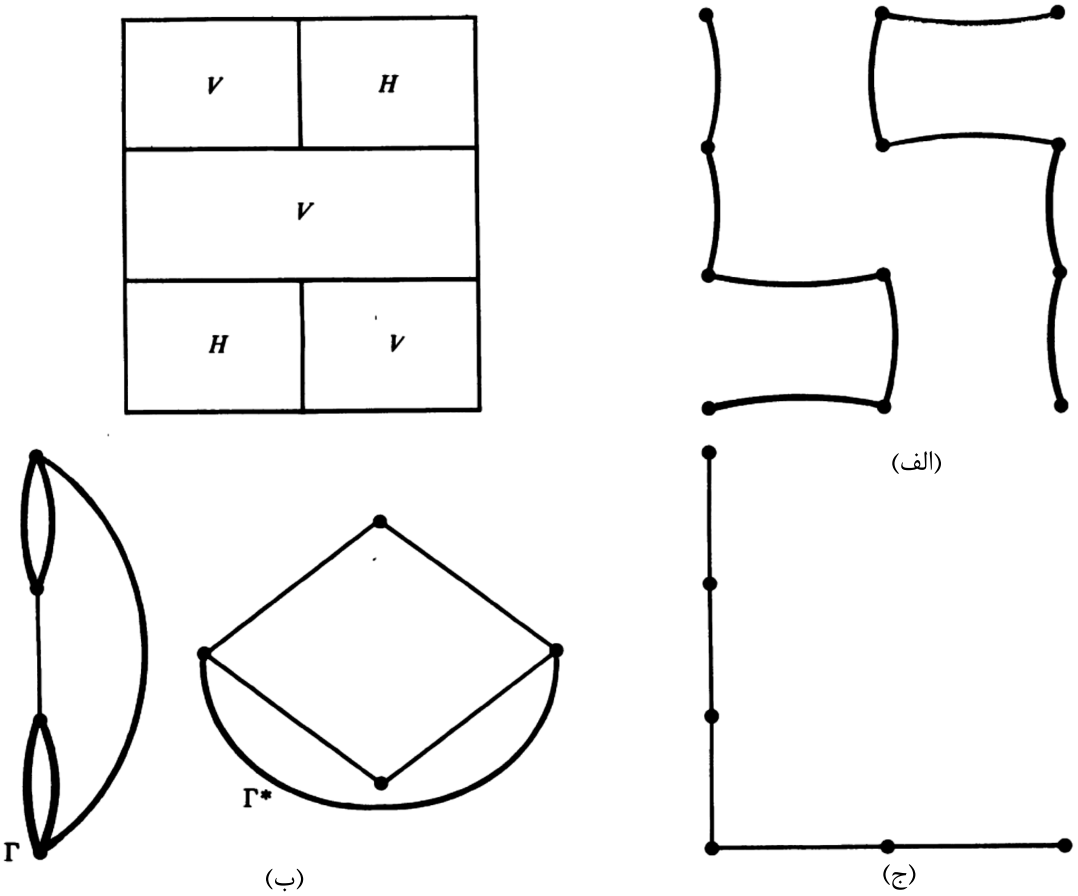
همان‌طور که نویسندگان اثبات‌های قضیهٔ ۱ مشاهده کرده‌اند، این نتیجه به ابعاد بالاتر قابل تعمیم است. تمام برهان‌ها، به‌جز (ظاهراً) اثبات‌های مجموعهٔ برش مینیمال، خط رفت و برگشت و استقرا، این تعمیم را نتیجه می‌دهند. به‌علاوه، نسخهٔ بعد بالاتر اجازه می‌دهد که $k$ (به‌جای فقط ۱) ضلع از هر کاشی 'تعیین‌شده' باشد.

**قضیهٔ ۲.** فرض کنید $R$ یک جعبه در $\mathbb{R}^n$ باشد که توسط جعبه‌های $n$-بعدی آجر شده است و هر آجر دارای حداقل $k$ ضلع با طول صحیح است. در این صورت $R$ دارای حداقل $k$ ضلع با طول صحیح است.

---

[۱] James Schmerl

[۲] designated




شکل ۷. گراف (الف) از اثبات مسیر اویلری، گراف‌های (ب)، $\Gamma$ و $\Gamma^*$ از اثبات مجموعهٔ برش مینیمال و گراف (ج) از اثبات تابع پله‌ای است.

برهان. اثبات چندجمله‌ای تقریباً به اصلاحی نیاز ندارد. همانند اثبات قضیهٔ ۱، می‌توان این آجرکشی را با حرکت ابرصفحه‌ها به اندازهٔ $t$ واحد، برای $t$ کوچک، انتقال دهیم. اگر حکم نادرست باشد، آنگاه حجم جعبهٔ اصلاح‌شده یک چندجمله‌ای برحسب $t$ است که درجهٔ آن از $k$ بزرگ‌تر است. اما بنا به فرض، هر آجر در این آجرکشیِ کمکی یک چندجمله‌ای با درجهٔ حداکثر $k$ است که این تناقض است. ■

بسیاری از برهان‌های دیگر نیز کار می‌کنند. در اثبات انتگرال حقیقی، تابع زیر انتگرال را با حاصل‌ضرب $t + \sin 2\pi x_r$ برای $r = 1, \dots, n$ جایگزین کنید. در این صورت، انتگرال روی یک جعبه برابر با یک چندجمله‌ای برحسب $t$ است که بر $t^k$ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر این جعبه دارای حداقل $k$ ضلع با طول صحیح باشد. در اثبات اعداد اول، تنها اعداد اول $p$ بزرگ‌تر از همهٔ طول اضلاع را در نظر بگیرید. این کار تضمین می‌کند که $p^2$ هیچ‌یک از طول اضلاع در آجر بزرگ‌شده را عاد نمی‌کند. اثبات تابع پله‌ای کار می‌کند اگر $f(x)$ و $g(y)$ را همانند تعمیم اثبات انتگرال، با $t + f(x_1), t + f(x_2), \dots$ جایگزین کنیم. رویکرد مشابهی اثبات تختهٔ شطرنجی را تعمیم می‌دهد که اگر $k = 1$، به‌راحتی کار می‌کند. اثبات شمارش مربعات نیز کار می‌کند، هرچند در حالت $k > 1$ باید از یک عدد صحیح فرد برای انتقال مرزهای ابرصفحه‌ها به‌سمت مقداری صحیح استفاده کرد، در این صورت توانی از ۲ که تعداد مربعات در مستطیل کمکی را عاد می‌کند متناظر با تعداد اضلاع با طول صحیح است.

اگر $k = 1$ آنگاه برهان‌های مسیر اویلری و گراف دوبخشی قضیهٔ ۲ را اثبات می‌کنند، زیرا هنوز هم هر گوشه (به‌جز گوشه‌های جعبهٔ مرجع) روی تعدادی زوج از آجرها قرار دارد. برای $k$ بزرگ‌تر، همان‌طور که اندرو ماس کولل[1] اشاره کرده است می‌توان از استقرا استفاده کرد: حالت $k = 1$ منجر به وجود یک ضلع با طول صحیح می‌شود، سپس بر ابرصفحهٔ عمود بر این مسیر تصویر کنید و از استقرا روی بُعد استفاده کنید. مزیت این رویکرد استقرایی ارائهٔ اثباتی برای تعمیم روژا در حالت $k > 1$ است که در آن فرض شده است هر آجر که دارای یک گوشه با مختصات صحیح است، $k$ ضلع با طول صحیح دارد.

اثبات‌های چندجمله‌ای، مسیر اویلری و تابع پله‌ای از قضیهٔ ۲ نشان می‌دهند که تعمیم از منظر نظریهٔ گروه‌ها برای هر $n$ و $k$ دلخواه برقرار است. به‌طور دقیق‌تر: اگر یک جعبهٔ $n$-بعدی توسط جعبه‌هایی آجرکشی شده باشد که هر کدام دارای حداقل $k$ ضلع تعیین‌شده

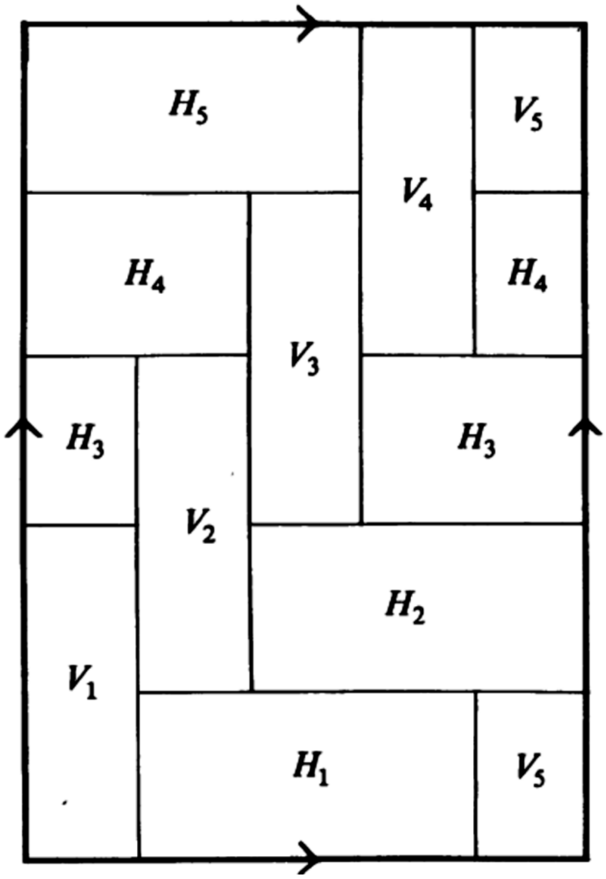
[1] Andreu Mas-Colell

هستند، آنگاه حداقل $k$ جهت وجود دارد که در هر یک، طول ضلع جعبهٔ مرجع در زیرگروهی از $\mathbb{R}$ قرار دارد که توسط طول اضلاع تعیین‌شده در آن جهت تولید می‌شود.

تعمیم دیگری با در نظر گرفتن کاشی‌کاری‌های چندگانه از مستطیل نشأت می‌گیرد، یعنی تعداد متناهی کاشی که لزوماً دوبه‌دو مجزا نیستند اما هر نقطه از مستطیل مرجع (به‌جز مرزهای کاشی‌ها) در تعداد یکسانی از کاشی‌ها (چندگانگی) قرار می‌گیرند. اثبات‌های انتگرالی در حالت اعداد صحیح کار می‌کنند. همچنین اثبات‌های تختهٔ شطرنجی، چندجمله‌ای، شمارش مربعات (با جای‌گذاری $\frac{۱}{p}$ به‌جای $\frac{۱}{۲}$ که $p$ در آن عدد اولی بزرگ‌تر از چندگانگی است) و اعداد اول (با استفاده از اعداد اول بزرگ‌تر از چندگانگی) کار می‌کنند. اثبات مسیر اویلری نیز کار می‌کند اگر همان‌طور که پترسن اشاره کرده است، گرافی جهت‌دار بسازیم که در هر کاشی، یال‌های آن از گوشهٔ پایین سمت چپ و گوشهٔ بالا سمت راست خارج و به دو گوشهٔ دیگر وارد شوند. در این صورت، درجهٔ خروجی گوشهٔ پایین سمت چپ برابر با چندگانگی است درحالی‌که درجهٔ ورودی و درجهٔ خروجی سایر رئوس غیر از گوشه‌ها یکسان است. بنابراین یک مسیر جهت‌دار از گوشهٔ پایین سمت چپ، به یکی از گوشه‌های مجاور در $R$ ختم می‌شود. اثبات‌های مسیر اویلری، تابع پله‌ای و چندجمله‌ای در حالت گروه‌ها نیز کار می‌کنند.

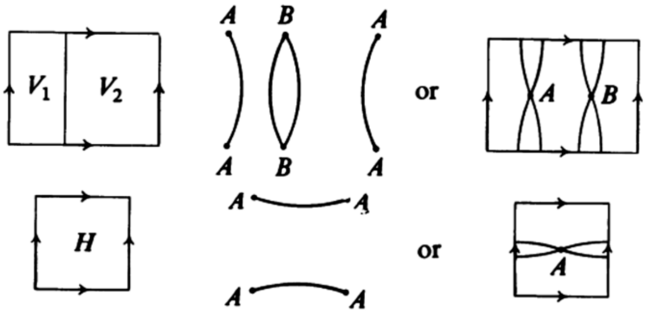
می‌توانیم این قضیه را به حالاتی مانند استوانه و چنبره که اضلاع مستطیل یکی در نظر گرفته می‌شوند تعمیم دهیم. ابتدا استوانه را در نظر بگیرید که در آن فرض می‌کنیم دو ضلع عمودی روبه‌روی هم یکی هستند. تعمیم مستقیمی از قضیهٔ ۱ برقرار است که به کمک برهان‌های خط رفت و برگشت، استقرا (که برای استوانه و چنبره ساخته شده بود)، استقرای دگرگون‌شده و مسیر اویلری (همان‌گونه که در اثبات قضیهٔ ۳ اصلاح شده است) اثبات می‌شود.

چنبره حالت جالب‌تری است، چراکه در این حالت قضیهٔ ۱ غلط است. یک چنبرهٔ مسطح $a \times b$ را در نظر بگیرید که مستطیلی $a \times b$ در صفحه است که اضلاع روبه‌روی هم یکی در نظر گرفته می‌شوند. مثال شکل ۸ که به‌طور مستقل توسط سولومن گلمب[۱] و رافائل رابینسون کشف شده است نشان می‌دهد که تعمیم خام از قضیهٔ ۱ غلط است.




شکل ۸. $H$-کاشی‌ها ۳ × ۶، $V$-کاشی‌ها ۶ × ۲ و چنبره ۱۵ × ۱۰ هستند. با تقسیم بر ۶ به یک کاشی‌کاری از چنبرهٔ $\frac{۵}{۲} \times \frac{۵}{۳}$ با استفاده از کاشی‌های $\frac{۱}{۲} \times ۱$ و $۱ \times \frac{۱}{۳}$ می‌رسیم.

[۱] Solomon Golomb



شکل ۹. دو مثال - یکی با دو کاشی و دیگری فقط با یک کاشی - از گراف‌های مرتبط با کاشی‌کاری‌های یک چنبره

با این وجود قضیهٔ ۱ به چنبره قابل تعمیم است هرچند حکم آن پیچیده‌تر است. قضیهٔ زیر ابتدا توسط رابینسون در حالت اعداد صحیح ثابت شد که اثبات آن از روش برهان استقرا از قضیهٔ ۱ استفاده کرده است و می‌تواند به حالت زیرگروه‌های دلخواه تعمیم داده شود. اثبات قضیهٔ ۳ که در زیر آمده است، ایده‌های برهان‌های مسیر اویلری و استقرا را تلفیق می‌کند. به موقعیت نادری توجه کنید که نتایج اصلی در مستطیل‌ها را به زیرگروه‌هایی دلخواه از $\mathbb{R}$ تعمیم می‌دهد درحالی‌که نتایج مربوط به چنبره به زیرمیدان‌های دلخواه از $\mathbb{R}$ تعمیم داده می‌شود.

**قضیهٔ ۳ (رابینسون).** فرض کنید که یک چنبرهٔ مسطح $a \times b$ توسط مستطیل‌هایی موازی با اضلاع چنبره کاشی شده باشد. همچنین فرض کنید که هر کاشی صرف‌نظر از طول یا عرض آن، طوری طراحی شده است که یک $H$-کاشی یا $V$-کاشی باشد و $G_H$ (به‌ترتیب $G_V$) گروه تولیدشده توسط پهنای $H$-کاشی‌ها (به‌ترتیب ارتفاع $V$-کاشی‌ها) باشد. در این صورت حداقل یکی از احکام زیر برقرار است:

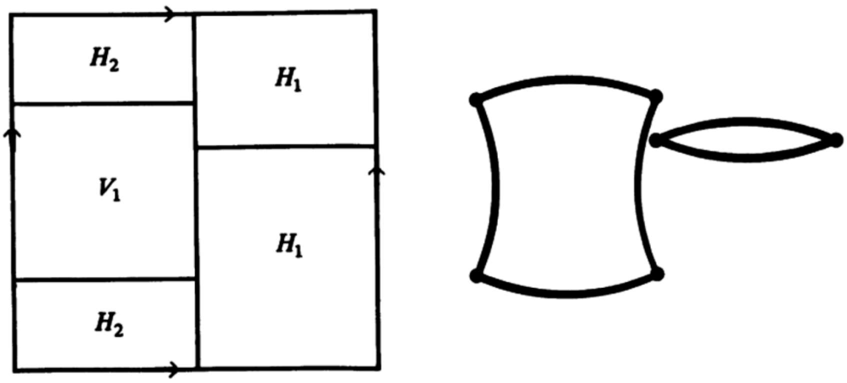
(۱) $a$ متعلق به $G_H$ است،

(۲) $b$ متعلق به $G_V$ است،

(۳) اعداد صحیح $m$ و $n$ وجود دارند که نسبت به هم اول‌اند به‌طوری که $ma$ متعلق به $G_H$ و $nb$ متعلق به $G_V$ است.

برهان. فرض کنید $\Gamma$ همان گراف متناظر با کاشی‌کاری باشد که در اثبات مسیر اویلری معرفی شد. روی چنبره می‌توانیم حلقه داشته باشیم. برای اطمینان از اینکه $\Gamma$ روی چنبره نشانده شده است، یال‌ها را کمی در جهت کاشی معرف آن‌ها خم کنید؛ شکل ۹ را ببینید. همانند حالت مسطح، هر رأس از درجهٔ ۲ یا ۴ است (در حالات بدیهی، مانند یک کاشی‌کاری با یک کاشی، گوشه‌ها دارای ۲ یا ۴ حلقه هستند). بنابراین هر مؤلفهٔ $\Gamma$ اویلری است. در حالت خاص، هر یال روی یک دور ساده قرار می‌گیرد.

اثبات از طریق استقرا روی $N$، تعداد کل کاشی‌ها، انجام می‌شود. اگر $N = 1$، آنگاه (۱) یا (۲) برقرار است. توجه کنید که برای $N > 1$، اگر $\Gamma$ دارای دوری غیرقابل انقباض[1] باشد، آنگاه یکی از (۱)، (۲) یا (۳) نتیجه می‌شود. بدین‌ترتیب می‌توانیم فرض کنیم که دور سادهٔ غیرقابل انقباض $C$ وجود دارد. اگر $C$ دقیقاً یک بار در یکی از جهت‌ها بپیچد، آنگاه (۱) یا (۲) برقرار است. در غیر این صورت، می‌توانیم از نتیجه‌ای شناخته‌شده استفاده کنیم که اگر $C$ بیش از یک بار در یک جهت بپیچد، آنگاه عدد پیچشی[2] آن در دو جهت نسبت به هم اول‌اند (این نتیجه‌ای از 'قضیهٔ وتر جهانی[3]' است که می‌گوید اگر $\gcd(m,n) = d$ آنگاه خم ساده بین مبدأ و $(m,n)$ دارای وتری است که انتقالی از پاره‌خط بین مبدأ و $(m/d\,,n/d)$ است). این موضوع (۳) را نتیجه می‌دهد. برای مثال، دو دور در گراف کاشی‌کاری رابینسون - گلمب وجود دارد که سه بار حول جهت افقی و دو بار در جهت عمودی می‌پیچد، پس $3a$ در $G_H$ و $2b$ در $G_V$ قرار دارد. هرچند کاشی‌کاری‌هایی وجود دارند که گراف $\Gamma$ آن‌ها، هیچ دور غیرقابل انقباضی ندارد (برای مثال شکل ۱۰ را ببینید).

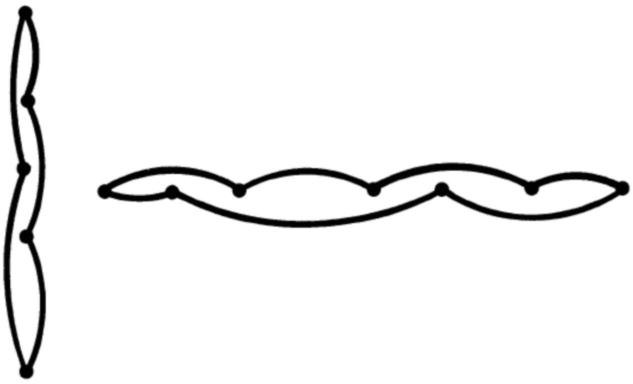


شکل ۱۰. مثالی از کاشی‌کاری چنبره‌ای که گراف آن دوری غیرقابل انقباض ندارد.

[1] noncontractible [2] winding number [3] Universal Chord Theorem

در این موارد باید نشان دهیم که می‌توان کاشی‌کاری را طوری اصلاح کرد که کمتر از $N$ کاشی داشته باشد. بنابراین فرض کنید که $\Gamma$ فقط دارای دورهای قابل انقباض باشد. در این صورت $\Gamma$ باید دارای یک دور قابل انقباض ساده باشد که هیچ یالی درون آن وجود ندارد (به آن دور خالی گوییم). بدین‌ترتیب اگر $C$ یک دور قابل انقباض ساده با کمترین تعداد یال‌ها در درونش باشد، آنگاه این تعداد باید صفر باشد؛ یعنی هر یال درون $C$ باید روی دوری قرار داشته باشد که تعداد یال‌های درونی آن کمتر از یال‌های درونی $C$ است.

ابتدا فرض کنید که $\Gamma$ دارای یک دور قابل انقباض خالی باشد که وقتی آن را در کاشی‌کاری مشاهده می‌کنیم، هیچ کاشی درون آن وجود نداشته باشد. چنین دوری، باید هر قسمت از مرز خود را دو بار بپیماید، یک بار در هر جهت. چون این دور ساده است، پس می‌تواند زاویهٔ قائمه نداشته باشد، بنابراین باید شبیه به یکی از دورهای شکل ۱۱ باشد. در هر حالت، می‌توانیم کاشی‌ها را به‌صورت شکل ۴ اصلاح کنیم (یک سمت را تا جایی گسترش می‌دهیم که باریک‌ترین یا کوتاه‌ترین کاشی در سمت دیگر را در بر گیرد) که $N$ را حداقل یک واحد کاهش می‌دهد، همان‌گونه که برای استقرا نیاز داریم.



شکل ۱۱. یک دور قابل انقباض که وقتی روی کاشی‌کاری مشاهده می‌شود، هیچ کاشی درون آن وجود ندارد باید به‌شکل یکی از این دو دور باشد.

اگر هیچ دوری همانند پاراگراف قبل موجود نباشد، آنگاه $\Gamma$ دارای یک دور قابل انقباض خالی $C$ است که یک کاشی مثلاً یک $H$-کاشی درونش دارد. چون $C$ خالی است، اضلاع بالا و پایین این کاشی متناظر با یال‌هایی روی $C$ هستند. گوشه‌های این کاشی را از بالا سمت راست و در جهت ساعتگرد $a$، $b$، $c$ و $d$ نام‌گذاری کنید. چون $C$ یک دور خالی است باید به‌صورت $a \dots bc \dots da$ باشد. حال، با اضافه کردن گام‌های عمودی بین $a$ و $b$ در $C$ نتیجه می‌گیریم که فاصلهٔ $a$ تا $b$ در $G_V$ قرار دارد. اما در این صورت می‌توانیم این $H$-کاشی را با یک $V$-کاشی عوض کرده و طول این دور را کم کنیم. می‌توانیم به این روش به کوتاه کردن این دور ادامه دهیم تا جایی که هیچ کاشی‌ای درون آن موجود نباشد. در این صورت، در حالت قبلی قرار داریم، جایی که کم کردن تعداد کاشی‌ها ساده بود. ■

چیز زیادی در مورد چنبره‌های با بعد بالاتر نمی‌دانیم. رابینسون با تعمیم برهان اعداد اول خود، نشان داد که اگر چنین چنبره‌ای توسط جعبه‌هایی با یک ضلع به طول صحیح پر شود، آنگاه این چنبره دارای حداقل یک ضلع به طول گویا است. همچنین این حکم را می‌توان با کمک برهان تابع پله‌ای که دارای امتیاز کار با گروه‌های دلخواه اثبات کرد.

**قضیهٔ ۴ (رابینسون، ماته).** چنبرهٔ $n$-بعدی مسطحی را با اضلاع به طول $a_i$، $i = ۱, \dots, n$، در نظر بگیرید که توسط آجرهایی $n$-بعدی موازی با اضلاع چنبره، آجر شده باشد. فرض کنید که هر آجر دارای ضلعی تعیین‌شده باشد. $G_i$ را گروه تولیدشده توسط طول اضلاع تعیین‌شده در $i$اُمین جهت در نظر بگیرید. در این صورت برای حداقل یک $a_i$ عدد صحیح مثبت $m$ وجود دارد به‌طوری که $ma_i$ متعلق به $G_i$ است.

برهان (ماته). جزئیات اثبات را تنها برای حالت چنبرهٔ مسطح $a \times b$ در $\mathbb{R}^۲$ بیان می‌کنیم، تعمیم به ابعاد بالاتر واضح است. فرض کنید مستطیل $a \times b$ در جایگاه استاندارد و مبدأ یکی از گوشه‌های یکی از کاشی‌ها باشد. کاشی‌کاری را به‌طور متناوب به کل صفحه گسترش دهید و گراف $\Gamma$ را همانند اثبات تابع پله‌ای تعریف کنید: اگر $(x, y)$ گوشه‌ای از یک کاشی در یکی از نسخه‌های چنبره باشد، آنگاه نقاط $(x, ۰)$ و $(۰, y)$ رئوس گراف‌اند. دو رأس روی محور $x$ها را به هم وصل می‌کنیم اگر بازهٔ بین آن‌ها توسط یک $H$-کاشی در کاشی‌کاری صفحه پوشانده شود؛ این حالت شامل مواردی می‌شود که کاشی‌ها در یک مرز عمودی از چنبره قرار گرفته‌اند. به‌طور مشابه یال‌ها روی محور $y$ها با استفاده از $V$-کاشی‌ها تعریف می‌شود.

تنها کافی است که ادعای زیر را ثابت کنیم، چراکه اگر $\Gamma$ دارای نامتناهی رأس، مثلاً روی محور $x$ها باشد که همگی در یک مؤلفهٔ همبندی هستند، آنگاه باید آن مؤلفه شامل دو رأس به‌صورت $(x, ۰)$ و $(x + ma, ۰)$ باشد. این بدان معناست که $ma$ در $G_۱$ واقع است.

**ادعا.** گراف $\Gamma$ دارای یک مؤلفهٔ همبندی نامتناهی است.

اثبات ادعا. فرض کنید که این ادعا نادرست است. در این صورت تمام مؤلفه‌ها متناهی هستند و تابع $C_۱$ را روی نقاط متناظر با رئوس گراف $\Gamma$ روی محور $x$ها طوری تعریف می‌کنیم که $C_۱(x)$ برابر با کمترین مقدار $t$ باشد به‌طوری که $(t,۰)$ در مؤلفهٔ همبندی یکسانی با $(x,۰)$ در $\Gamma$ باشد. به‌طور مشابه تابع $C_۲$ را برای رئوس روی محور $y$ها تعریف می‌کنیم. حال تابع پله‌ای $f$ را روی محور $x$ها و روی بازهٔ بین هر دو رأس متوالی $x'$ و $x''$ در $\Gamma$، برابر با $C_۱(x'') - C_۱(x')$ قرار می‌دهیم.

همانند گذشته، مجموع مقادیر $f$ روی بازه‌هایی که یک $H$-کاشی را در کاشی‌کاری $\mathbb{R}^۲$ افراز می‌کنند، صفر است. به‌علاوه، به‌دلیل متناوب بودن کاشی‌کاری صفحه، داریم $C_۱(x+a) = C_۱(x) + a$ و $f$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $a$ است. بنابراین مجموع مقادیر $f$ روی بازه‌هایی که یک $H$-کاشی را در چنبرهٔ اصلی در جایگاه استاندارد افراز می‌کنند، برابر با صفر است. این ویژگی‌ها برای تابع پله‌ای $g$ نیز که با استفاده از $C_۲$ مشابه $f$ تعریف می‌شود، برقرار است. برای اتمام اثبات، همانند قضیهٔ ۱ عمل کنید و کاشی‌کاری را به یک شبکه اصلاح کنید و توجه کنید که مجموع مقادیر $fg$ روی هر کاشی برابر با صفر است که از آنجا، مجموع روی کل چنبرهٔ $a \times b$ صفر می‌شود. اما این تناقض است، زیرا این مجموع برابر با $ab$ است: مجموع مقادیر $f$ (به‌ترتیب $g$) روی بازه‌های $[۰,a]$ (به‌ترتیب $[۰,b]$) برابر است با $C_۱(a) - C_۱(۰) = a$ (به‌ترتیب $C_۲(b) - C_۲(۰) = b$). ■

استدلال پیشین برای جعبه‌ای $n$-بعدی نیز کار می‌کند، جایی که برخی از اضلاع آن، نه همه، مشخص باشد. در این صورت، این نتیجه بیان می‌کند که یا جهتی 'ناشناخته' از جعبه وجود دارد که طول ضلع آن در زیرگروه تولیدشده توسط طول اضلاع تعیین‌شده در آن جهت قرار دارد یا جهتی 'شناخته‌شده' وجود دارد که مضرب صحیحی از طول ضلع آن در گروه متناظر با آن جهت قرار دارد. برخلاف اثبات قضیهٔ ۳، استدلال پیشین برای کاشی‌کاری‌های چندگانه نیز کار می‌کند و چیزی برای یک کاشی‌کاری چندگانه از یک چنبرهٔ دوبعدی استاندارد نتیجه می‌دهد: اگر هر کاشی دارای یک ضلع با طول صحیح باشد، آنگاه طول حداقل یک ضلع از چنبره گویا است (و به‌طور مشابه در کاشی‌کاری‌های چندگانه در ابعاد بالاتر).

## ۴. چکیده و مسائل باز

تعمیم‌های مختلفی که در اینجا مشاهده کردیم، کاری نسبتاً کامل در تمییز دادن اثبات‌ها انجام می‌دهد. اگر دو اثبات را معادل گوییم مشروط بر اینکه روی یک مجموعه از تعمیم‌ها کار کنند، آنگاه تنها اثبات‌های معادل (۳)~(۲)~(۱) و (۱۰)~(۹) هستند، مگر اصلاح و تغییر جدیدی پیدا شود. به نظر می‌رسد که دو تا از قوی‌ترین اثبات‌ها، برهان‌های مسیر اویلری و تابع پله‌ای باشند. اثبات مسیر اویلری روی چنبره‌های بُعد بالا، کاشی‌کاری‌های چندگانه از چنبرهٔ استاندارد و حالت $k > ۱$ از قضیهٔ ۲ شکست می‌خورد. اثبات تابع پله‌ای در همهٔ حالات کار می‌کند به‌جز چنبره و استوانه که منجر به بهترین نتیجهٔ ممکن نمی‌شود. برای یک مقایسهٔ قطعی باید تا زمانی منتظر بمانیم که وضعیت درست در ابعاد بالاتر حل شود؛ مسئلهٔ (الف) را در زیر ببینید.

**مسئله (الف).** آیا می‌توان حکم به‌ظاهر ضعیف دربارهٔ کاشی‌کاری‌های چنبره یا استوانه در بعد بالاتر را بهبود بخشید یا آن بهترین امکان است؟ ساده‌ترین حالت حل‌نشده، حالتی است که در آن وجوه چپ و راست جعبه مشخص باشد. آیا چنین جعبه‌ای با ابعاد $\alpha \times \beta \times \gamma$ را که $\alpha$ گویا و $\beta$ و $\gamma$ گنگ هستند، می‌توان با جعبه‌هایی که هر یک دارای ضلعی به طول واحد است پر کرد؟

**مسئله (ب)** (گلمب). به‌ازای کدام سه‌تایی $(a,b,k)$ می‌توان چنبرهٔ $a \times b$ را با استفاده از نسخه‌هایی از یک کاشی (عمودی یا افقی) $k \times ۱$ کاشی کرد؟

**تذکر.** نتیجهٔ اصلی بروین، مستطیل‌هایی را که می‌توان با استفاده از نسخه‌های کاشی $k \times ۱$ کاشی کرد، شناسایی می‌کند: یا ارتفاع یا پهنای مستطیل ضریبی از $k$ است. این نتیجه برای چنبرهٔ $a \times b$ صادق است اگر $k$ توانی از عدد اولی باشد. این قضیه اولین‌بار توسط رابینسون و گلمب با روش رنگ‌آمیزی ثابت شد، همچنین می‌توان آن را از قضیهٔ ۳ نتیجه گرفت، تنها کافی است همه چیز را بر $k$ تقسیم کنید و مشاهده کنید که هر دو ضریبِ نسبت به هم اولِ $m$ و $n$ نمی‌توانند توانی از عدد اول یکسانی باشند. بنابراین $k = ۶$ کوچک‌ترین عددی است که به‌ازای آن سه‌تایی $(a,b,k)$ همانند مسئلهٔ (الف) وجود دارد که هیچ‌یک از $a$ و $b$ بر $k$ بخش‌پذیر نیست. یک حالت خاص حل‌نشده از مسئلهٔ (الف)، شناسایی چنبره‌های $a \times b$ است که می‌توان آن‌ها را به کمک نسخه‌هایی از کاشی $۶ \times ۱$ کاشی کرد. گلمب نشان داده است که چنبرهٔ $۱۵ \times ۱۰$ کوچک‌ترین مثال است.

**مسئله (ج).** دربارهٔ کاشی‌کاری‌های دوگانه از چنبرهٔ استاندارد که هر کاشی دارای حداقل یک ضلع با طول صحیح است چه می‌توان گفت؟ آیا درست است که طول یکی از اضلاع چنبره عددی صحیح است یا طول هر دو ضلع آن عددی گویا هستند؟

## پیوست برای تصدیق متفاوت بودن اثبات‌ها

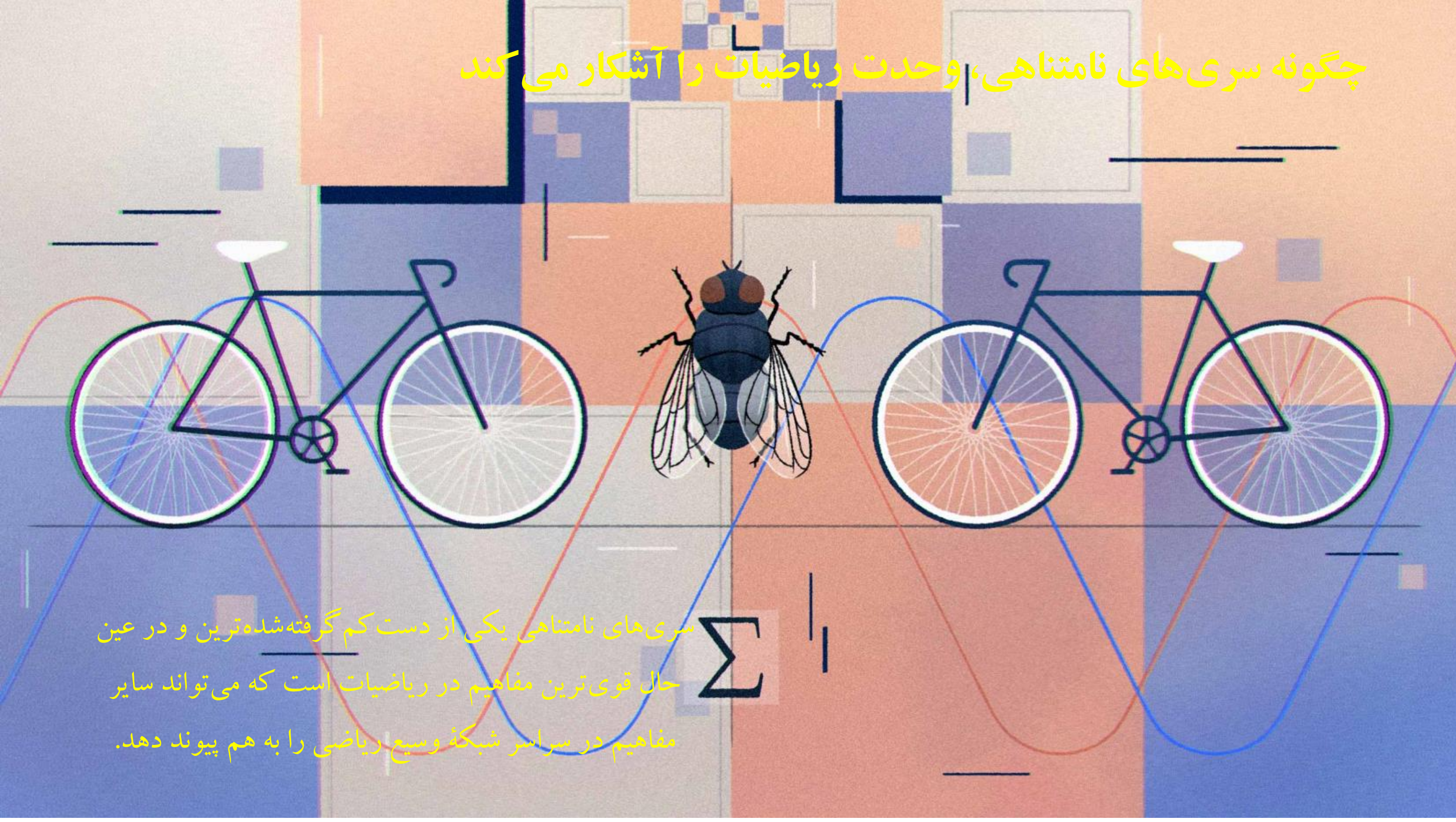
| برهان‌ها: | تعمیم‌ها: |
|---|---|
| (۱) انتگرال دوگانهٔ مختلط | ۱. صفحه |
| (۲) انتگرال دوگانهٔ حقیقی | ۲. صفحه، فرض روژا |
| (۳) تختهٔ شطرنجی | ۳. صفحه، گروه‌های دلخواه |
| (۴) شمارش مربعات | ۴. بعد $n$، $k = ۱$ |
| (۵) چندجمله‌ای‌ها | ۵. بعد $n$، $k > ۱$ |
| (۶) اعداد اول | ۶. بعد $n$، $k > ۱$، فرض روژا |
| (۷) مسیر اویلری | ۷. استوانه |
| (۸) گراف دوبخشی | ۸. چنبره |
| (۹) استقرا | ۹. صفحه، کاشی‌کاری چندگانه |
| (۱۰) استقرای دگرگون‌شده | ۱۰. صفحه، کاشی‌کاری چندگانه، گروه‌های دلخواه |
| (۱۱) مجموعهٔ برش مینیمال | ۱۱. چنبرهٔ از بعد بالا |
| (۱۲) خط رفت و برگشت | ۱۲. چنبره، کاشی‌کاری چندگانه |
| (۱۳) توابع پله‌ای | |
| (۱۴) لم اسپرنر | |

| شمارهٔ اثبات | حالاتی که در آن کار می‌کند |
|---|---|
| ۱، ۲، ۳ | ۱، ۴، ۵، ۹ |
| ۴ | ۱، ۲، ۴، ۵، ۹ |
| ۵ | ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۹، ۱۰ |
| ۶ | ۱، ۴، ۵، ۹، ۱۱ |
| ۷ | ۱، ۲، ۳، ۴، ۷، ۸، ۹، ۱۰ |
| ۸ | ۱، ۲، ۳، ۴، ۹، ۱۰ |
| ۹، ۱۰ | ۱، ۳، ۷، ۸ |
| ۱۱ | ۱، ۳ |
| ۱۲ | ۱، ۳، ۷ |
| ۱۳ | ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ |
| ۱۴ | ۱، ۲، ۳، ۴ |

### مرجع:

Wagon, Stan, Fourteen Proofs of a Result about Tiling a Rectangle, The American Mathematical Monthly, vol. 94, 1987, pp. 601-617.

# چگونه سری‌های نامتناهی، وحدت ریاضیات را آشکار می‌کند



سری‌های نامتناهی یکی از دست‌کم‌گرفته‌شده‌ترین و در عین حال قوی‌ترین مفاهیم در ریاضیات است که می‌تواند سایر مفاهیم در سراسر شبکهٔ وسیع ریاضی را به هم پیوند دهد.

**مترجم: مهدیه آزادحسن‌باروق**

دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهید بهشتی

برای درخشیدن و مشهور شدن، شکست دادن جان فون نویمان[1] سخت بود. نویمان بیش از طراحی کامپیوتر مدرن و ابداع نظریهٔ بازی، برای محاسبات ذهنی سریع خود، افسانه‌ای بود.

داستان از این قرار است که یک روز شخصی او را با یک معما به چالش کشید. دو دوچرخه‌سوار از دو انتهای جاده‌ای به طول ۲۰ مایل، با سرعت ۱۰ مایل بر ساعت به‌سمت دیگری حرکت می‌کنند. وقتی آن‌ها شروع به حرکت می‌کنند، مگسی که روی چرخ جلوی یکی از دوچرخه‌ها نشسته بود پرواز می‌کند و با سرعت ۱۵ مایل بر ساعت به‌سمت دوچرخهٔ دیگر می‌رود. به محض اینکه به آنجا می‌رسد فوراً می‌چرخد و به‌سمت دوچرخهٔ اول برمی‌گردد، سپس به‌سمت دوچرخهٔ دوم برمی‌گردد و به همین ترتیب ادامه می‌دهد. به پرواز به عقب و جلو ادامه می‌دهد تا در نهایت در هنگام برخورد دوچرخه‌ها، بین لاستیک‌های جلوی آن‌ها گیر کند. مگس در مجموع چقدر مسافت را پیش از له شدن طی کرده است؟

این مسئله به نظر سخت می‌رسد. سفر رفت و برگشت مگس از نامتناهی بخش تشکیل شده است که هر کدام کوتاه‌تر از قسمت قبلی است. جمع کردن آن‌ها به نظر کار راحتی نیست.

اما اگر به‌جای مگس، به دوچرخه‌سواران فکر کنید، مشکل آسان می‌شود. در جاده‌ای که ۲۰ مایل طول دارد، دو دوچرخه‌سواری که با سرعت ۱۰ مایل بر ساعت به یکدیگر نزدیک می‌شوند، پس از ۱ ساعت در وسط یکدیگر را ملاقات می‌کنند و در طول آن ساعت، مهم نیست مگس چه مسیری را طی می‌کند، باید ۱۵ مایل را طی کرده باشد، زیرا سرعت آن ۱۵ مایل بر ساعت بود.

وقتی فون نویمان این معما را شنید، فوراً پاسخ داد: «۱۵ مایل». پرسشگر ناامید او گفت: «اوه، حقه را فهمیدی.» فون نویمان گفت: «کدام حقه؟ من فقط سری نامتناهی را جمع کردم.»

سری‌های نامتناهی - مجموع بی‌نهایت عدد، متغیر یا تابعی که از یک قاعدهٔ خاص پیروی می‌کنند. - نقش کوچکی در نمایش بزرگ حسابان دارند. درحالی‌که مشتقات و انتگرال‌ها نمایش را از آن خود می‌کنند، سری‌های نامتناهی متواضعانه کنار می‌ایستند. اواخر واحد درسی حسابان، زمانی که همه در تلاش‌اند تا خودشان را به خط پایان برسانند، آن‌ها ظاهر می‌شوند.

پس چرا آن‌ها را مطالعه کنیم؟ سری‌های نامتناهی به یافتن جواب‌های تقریبی برای مسائل دشوار کمک می‌کنند و نکات ظریفی از دقت ریاضی را نشان می‌دهند. اما مگر شما یک دانشمند مشتاق باشید، در غیر این صورت همهٔ این‌ها برای شما یک خمیازهٔ بزرگ است.

به‌علاوه، سری‌های نامتناهی اغلب بدون هیچ‌گونه کاربردی در دنیای واقعی ارائه می‌شوند. معدود کاربردهای سری‌های نامتناهی - حقوق یا مقرری سالیانه، وام‌های مسکن و طراحی رژیم‌های شیمی‌درمانی - که ظاهر می‌شوند می‌توانند برای مخاطبان نوجوان دور از دسترس به نظر برسند.

قانع‌کننده‌ترین دلیل برای یادگیری سری‌های نامتناهی (یا چیزی که من به دانش‌آموزانم می‌گویم) این است که آن‌ها رابطه‌های خیره‌کننده‌ای هستند. آن‌ها روابطی را بین حوزه‌های مختلف ریاضیات و پیوندهایی غیرمنتظره بین هر آنچه که قبلاً وجود داشته، آشکار می‌کنند. تنها زمانی که به این بخش از ریاضیات و حسابان رسیدید، ساختار واقعی ریاضی - تمام ریاضیات - نمایان می‌شود.

قبل از اینکه توضیح بدهم، اجازه دهید به معمای دیگری که شامل یک سری نامتناهی است نگاه کنیم. حلِ گام به گام آن روشن می‌کند که چگونه فون نویمان مسئلهٔ مگس را حل کرده است و زمینهٔ تفکر گسترده‌تری دربارهٔ سری‌های نامتناهی فراهم می‌کند.

فرض کنید که می‌خواهید یک کلاه فانتزی را از یک فروشندهٔ خیابانی بخرید. او ۲۴ دلار می‌خواهد و شما می‌پرسید: «۱۲ دلار چطور؟» او پاسخ می‌دهد: «بیا اختلاف این دو را نصف کنیم، ۱۸ دلار.»

اغلب این روش نتیجه‌بخش است. تقسیم اختلاف، منطقی به نظر می‌رسد، اما نه برای شما، زیرا شما هم کتابچهٔ راهنمای 'هنر چانه‌زنی نامتناهی' را خوانده‌اید. شما با پیشنهادتان تلافی می‌کنید تا اختلاف بین ۱۲ دلار و آخرین عدد روی میز را که ۱۸ دلار است، نصف کنید. می‌گویید: «۱۵ دلار چطور؟» فروشنده می‌گوید: «اوه نه، دوست من بیایید اختلاف دو عدد را دوباره نصف کنیم، ۱۶.۵۰ دلار.» تا زمانی که روی قیمت یکسانی همگرا نشوید، این امر به‌صورت غیرمعمول ادامه می‌یابد. قیمت نهایی چقدر است؟

پاسخ، مجموع یک سری نامتناهی است. برای اینکه متوجه شوید، توجه کنید که پیشنهادهای متوالی از یک الگوی منظم پیروی می‌کنند:

| قیمت درخواستی فروشنده | ۲۴ |
|---|---|
| اولین پیشنهاد شما | ۱۲ = ۲۴ − ۱۲ |
| تقسیم کردن اختلاف بین ۱۲ و ۲۴ | ۱۸ = ۲۴ − ۱۲ + ۶ |
| تقسیم کردن اختلاف بین ۱۲ و ۱۸ | ۱۵ = ۲۴ − ۱۲ + ۶ − ۳ |

نکتهٔ کلیدی آن است که اعداد سمت چپ تساوی، مرتباً از سری اعدادی در سمت راست تساوی ساخته می‌شوند که همواره در حال طولانی‌تر شدن هستند. هر عددی که در دنبالهٔ (۲۴, −۱۲, ۶, −۳, ...) ظاهر می‌شود، نصف عددی است که قبل از آن قرار دارد، اما با علامت مخالف. بنابراین قیمت $P$ که شما و فروشنده با آن موافقت خواهید کرد برابر است با:

$$P = ۲۴ - ۱۲ + ۶ - ۳ + \cdots$$

که در آن سه نقطه به معنای آن است که این سری تا ابد ادامه دارد.

به‌جای آنکه بخواهیم ذهن خود را در اطراف چنین عبارت نامتناهی طولانی بپیچانیم، می‌توانیم با ترفندی ماهرانه مشکل را آسان سازیم. این ترفند به ما این امکان را می‌دهد که با ساده کردن گردایه‌ای نامتناهی از جملات، به عبارتی بسیار ساده‌تر برای محاسبه برسیم.

پیشگامان حسابان دریافتند که تمام توابعی را که با آن‌ها آشنا بودند، می‌توان به واحد پول جهانی 'سری‌های توانی' تبدیل کرد.

بیایید $P$ را دو برابر کنیم. در این صورت همهٔ اعداد سمت راست دو برابر می‌شوند. بدین‌ترتیب

$$۲P = ۴۸ - ۲۴ + ۱۲ - ۶ + \cdots$$

حال این چگونه می‌تواند به ما کمک کند؟ توجه کنید که زنجیرهٔ نامتناهی جملات در $۲P$ تقریباً مشابه همان $P$ است، با این تفاوت که ما یک عدد پیشرو جدید داریم (۴۸) و همهٔ علامت‌های مثبت و منفی اعداد اصلی ما معکوس هستند. بنابراین اگر سری $P$ را به سری $۲P$ اضافه کنیم، ۲۴ها و ۱۲ها و هر چیز دیگری دوبه‌دو حذف می‌شوند، به‌جز ۴۸ که هیچ مشابهی برای حذف آن وجود ندارد. پس $۲P + P = ۴۸$ یعنی $۳P = ۴۸$ و درنتیجه $P = \$۱۶$.

این همان مبلغی است که بعد از چانه زدن‌های نامتناهی برای کلاه می‌پردازید.

مسئلهٔ مگس و دو دوچرخه از یک الگوی ریاضی مشابه پیروی می‌کنند. با کمی تلاش، می‌توانید استنباط کنید که هر طولی از مسیر رفت و برگشت مگس، یک‌پنجم طول مسیر قبلی است. فون نویمان محاسبهٔ 'سری هندسی' حاصل را یک بازی کودکانه می‌دانست. سری هندسی، نوع خاصی از سری‌هایی است که در نظر گرفته‌ایم و در آن، نسبت تمام جملات متوالی یکسان است. برای مسئلهٔ مگس، این نسبت $\frac{۱}{۵}$ است. برای مسئلهٔ چانه زدن این نسبت $-\frac{۱}{۲}$ است.

به‌طور کلی، هر سری هندسی $S$ به‌شکل

$$S = a + ar + ar^{۲} + ar^{۳} + \cdots$$

است که $r$ قدرنسبت و $a$ جملهٔ پیشرو نامیده می‌شود. اگر قدرنسبت $r$ بین ۱ و ۱− باشد، همان‌طور که در دو مسئلهٔ ما این‌گونه است، می‌توان با استفاده از ترفند بالا به‌جای ضرب در ۲، با ضرب در $r$ نشان داد که مجموع سری برابر است با $S = \frac{a}{۱-r}$.

در مسئلهٔ چانی‌زنی $a$، ۲۴ و $r$، $-\frac{۱}{۲}$ بود. با جای‌گذاری این اعداد در فرمول، داریم $S = \frac{۲۴}{۳/۲} = ۱۶$؛ همان‌طور که قبلاً به دست آوردیم.

برای مسئلهٔ مگس، باید کمی کار کنیم تا جملهٔ پیشرو $a$ را پیدا کنیم. جملهٔ پیشرو مسافتی است که مگس در اولین مرحله از سفر رفت و برگشت خود طی کرده است، بنابراین برای محاسبهٔ آن باید بفهمیم مگسی که با سرعت ۱۵ مایل بر ساعت حرکت می‌کند، ابتدا در کجا با دوچرخه‌ای که با سرعت ۱۰ مایل بر ساعت به آن نزدیک می‌شود، برخورد می‌کند. از آنجایی که سرعت آن‌ها نسبت ۱۵:۱۰ یا ۳:۲ را تشکیل می‌دهد، زمانی که مگس $\frac{۳}{۳+۲}$ از فاصلهٔ ۲۰ مایلی اولیه را طی کرده باشد، به هم می‌رسند؛ یعنی $a = \frac{۳}{۵} \times ۲۰ = ۱۲$ مایل. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که هر بار مگس برمی‌گردد، طول مسیر به نسبت $r = \frac{۱}{۵}$ کوچک می‌شود. فون نویمان فوراً همهٔ این‌ها را دید و با استفاده از فرمول بالا $\frac{a}{۱-r}$، کل مسافت طی‌شده توسط مگس را پیدا کرد:

$$S = \frac{۱۲}{۱-\frac{۱}{۵}} = \frac{۱۲}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۶۰}{۴} = ۱۵ \text{ مایل}$$

اکنون به اصل مطلب برگردیم: چگونه سری‌هایی مانند این دو مسئله، برای پیوند بخش‌های مختلف ریاضی به کار می‌روند؟ برای درک این موضوع باید دیدگاه خود را در مورد فرمول‌هایی مانند فرمول

$$۱ + r + r^{۲} + r^{۳} + \cdots = \frac{۱}{۱-r}$$

وسیع‌تر کنیم. این فرمول مشابه فرمول قبلی است با این تفاوت که $a$ برابر با یک است. به‌جای آنکه $r$ را به‌عنوان یک عدد خاص مانند $\frac{۱}{۵}$ یا $-\frac{۱}{۲}$ در نظر بگیرید، $r$ را به‌عنوان یک متغیر در نظر بگیرید. سپس این معادله مطلب شگفت‌انگیزی را می‌گوید؛ نوعی کیمیاگری ریاضی را نشان می‌دهد، گویی می‌توان سرب را به طلا تبدیل کرد. این معادله بیان می‌کند که یک تابع معین از $r$ (در اینجا ۱ تقسیم بر $(۱-r)$ می‌تواند به چیزی ساده‌تر تبدیل شود؛ ترکیبی از توان‌های سادهٔ $r$، مانند $r^{۲}$ و $r^{۳}$ و ...

اکنون فرمول اویلر که مستقیماً از سری‌های نامتناهی زاده می‌شود، ضروری است.

جالب این است که این امر برای تعداد زیادی از توابع دیگر که تقریباً در همه‌جای علم و مهندسی وجود دارند، صادق است. پیشگامان حسابان دریافتند که تمام توابعی را که با آن‌ها آشنا هستند - تابع‌های سینوس و کسینوس، لگاریتم‌ها و نمایی‌ها - می‌توان به واحد پول جهانی 'سری‌های توانی' تبدیل کرد، که نوعی از نسخهٔ بهبودیافته از یک سری هندسی هستند که اکنون ضرایب در آن‌ها می‌توانند تغییر کنند. هنگامی که آن‌ها این تبدیلات را انجام دادند، متوجه اتفاقات شگفت‌انگیزی شدند. برای مثال، سری‌های توانی برای توابع کسینوس، سینوس و نمایی در اینجا آمده است (نگران نباشید که از کجا آمده‌اند، فقط به ظاهر آن‌ها نگاه کنید):

$$\cos x = ۱ - \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۴}}{۴!} - \frac{x^{۶}}{۶!} + \cdots$$

$$\sin x = ۱ - \frac{x^{۳}}{۳!} + \frac{x^{۵}}{۵!} - \frac{x^{۷}}{۷!} + \cdots$$

$$e^{x} = ۱ + x + \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۳}}{۳!} + \frac{x^{۴}}{۴!} + \cdots$$

در کنار تمام علامت‌های تعجب شاد و شایسته (که در واقع بیانگر فاکتوریل‌ها هستند؛ مثلاً !۴ به معنای ۱ × ۲ × ۳ × ۴ است)، توجه کنید که سری $e^x$ به‌طرز وسوسه‌انگیزی به مخلوطی از دو فرمول بالایش نزدیک شده است. اگر فقط تناوب مثبت و منفی در $\cos x$ و $\sin x$ می‌توانست به‌نحوی با همهٔ علائم مثبت $e^x$ هماهنگ شود، همه چیز مطابقت می‌کرد.

این تصادف، لئونارد اویلر[۲] را به کشف یکی از شگفت‌انگیزترین و دور از دسترس‌ترین فرمول‌ها در تاریخ ریاضیات سوق داد:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

که در آن $i$ عدد موهومی است و به‌صورت $i = \sqrt{-۱}$ تعریف شده است.

فرمول اویلر ارتباطی ظالمانه را بیان می‌کند. این فرمول اثبات می‌کند که سینوس‌ها و کسینوس‌ها، تجسم چرخه‌ها و امواج، خویشاوند مخفی تابع نمایی، مظهر رشد و زوال، هستند اما تنها زمانی که عدد $e$ را به توان یک عدد موهومی برسانیم (به هر معنی که باشد). اکنون فرمول اویلر که مستقیماً از سری‌های نامتناهی زاده می‌شود، در مهندسی برق، مکانیک کوانتوم و تمام رشته‌های فنی مرتبط با امواج و چرخه‌ها ضروری است.

پس از رسیدن به اینجا، می‌توانیم آخرین گام را برداریم که ما را به معادله‌ای می‌رساند که اغلب به‌عنوان زیباترین معادله در تمام ریاضیات توصیف می‌شود. این فرمول حالت خاص فرمول اویلر است که در آن $x = \pi$:

$$e^{i\pi} + ۱ = ۰$$

این معادله، تعداد انگشت‌شماری از مشهورترین اعداد در ریاضیات را به هم متصل می‌کند: صفر، ۱، $\pi$، $i$ و $e$. هر کدام نمادی از یک شاخهٔ کامل از ریاضی است. به‌این‌ترتیب می‌توان این معادله را به‌عنوان یک تلاقی باشکوه، گواهی بر وحدت ریاضیات دانست.

صفر، نشان‌دهندهٔ نیستی و خلأ است. با این حال فقدان عدد نیست، این عددی است که کل دستگاه عددنویسی ما را ممکن می‌کند. سپس ۱ وجود دارد که واحد، آغاز، سنگ بستر شمارش و اعداد و به‌طور کلی، تمام ریاضیات دورهٔ ابتدایی است. بعد $\pi$ می‌آید، نماد دایره و کمال، در عین حال با جنبه‌ای تاریک و اسرارآمیز که در الگوی رمزآلود ارقام بی‌پایان خود به بی‌نهایت اشاره می‌کند. $i$ عددی خیالی، تمثالی از جبر و تجسم جهش‌های تخیل خلاق است که به اعداد اجازه می‌دهد تا غل و زنجیرهای بزرگی را بشکنند و در نهایت $e$، طلسم حسابان و نماد حرکت و تغییر است.

وقتی که یک پسربچه بودم، پدرم به من گفت که ریاضی مثل یک برج است. یک چیز بر چیز دیگر بنا می‌شود. جمع بر روی اعداد و تفریق بر روی جمع ساخته می‌شود و در ادامه، از جبر، هندسه، مثلثات و حسابان صعود می‌کند تا به 'ریاضیات عالی' برسد؛ نامی مناسب برای یک بنای سر به فلک کشیده.

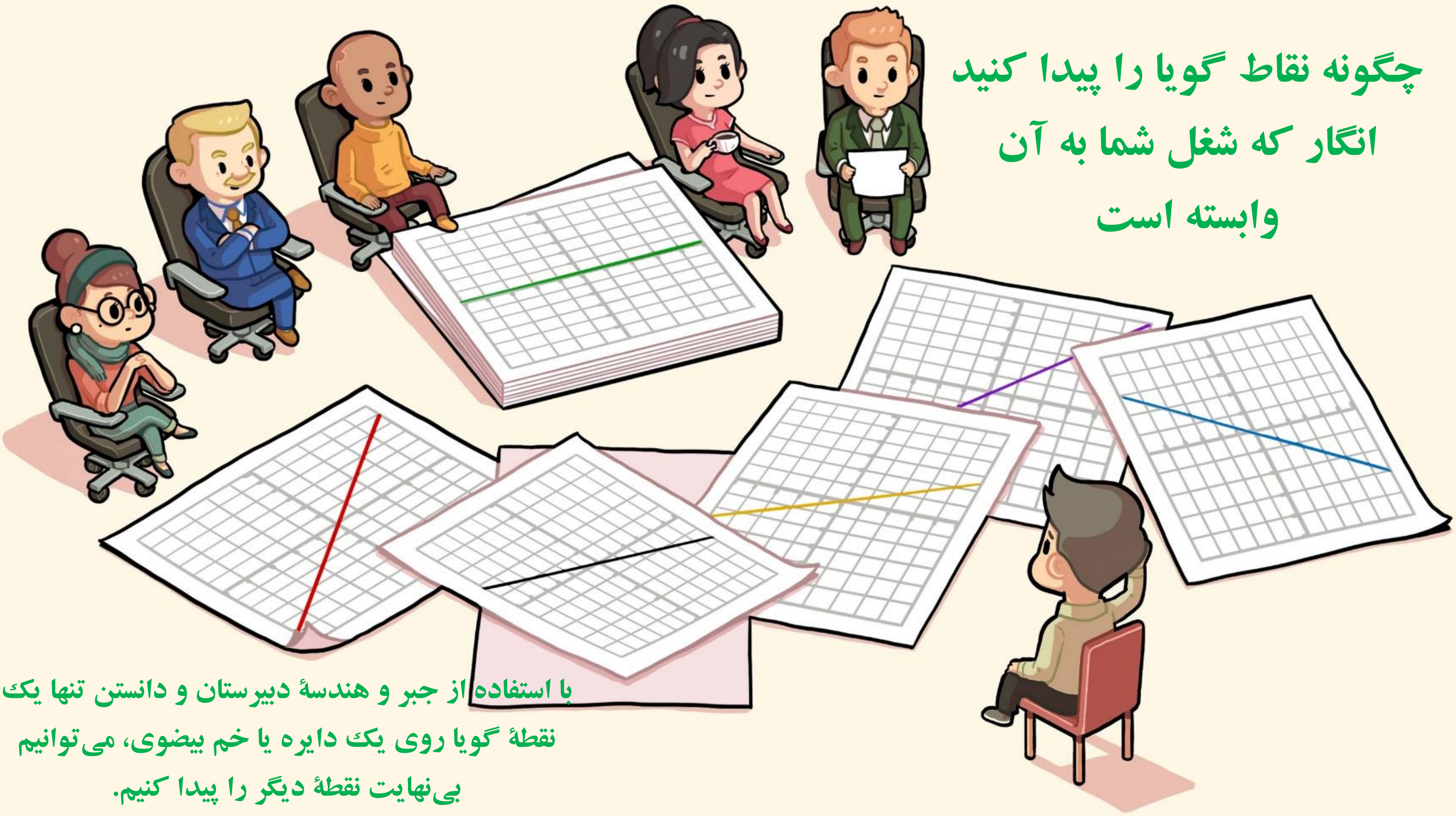
اما وقتی در مورد سری‌های نامتناهی یاد گرفتم، دیگر نمی‌توانستم ریاضی را به‌عنوان یک برج یا حتی به تعبیر دیگری یک درخت ببینم. قسمت‌های مختلف آن شاخه‌هایی نیستند که از هم جدا شوند و جداگانه راه خود را طی کنند. نه! ریاضی یک شبکه است. تمام قطعات آن به یکدیگر متصل شده و از یکدیگر حمایت می‌کنند. هیچ بخشی از ریاضیات از بقیه جدا نمی‌شود. این یک شبکه است، کمی شبیه به یک سیستم عصبی یا بهتر بگوییم، یک مغز.

**مرجع:**

https://www.quantamagazine.org/how-infinite-series-reveal-the-unity-of-mathematics-20220124/

[۱] John von Neuma

[۲] Leonhard Euler



# چگونه نقاط گویا را پیدا کنید انگار که شغل شما به آن وابسته است

**با استفاده از جبر و هندسهٔ دبیرستان و دانستن تنها یک نقطهٔ گویا روی یک دایره یا خم بیضوی، می‌توانیم بی‌نهایت نقطهٔ دیگر را پیدا کنیم.**

**مترجم: شقایق باقری**
دانشجوی کارشناسی آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان،
پردیس فاطمه‌الزهرا، اهواز

تصور کنید که شما در قسمت انتهایی میز کنفرانس طویلی نشسته‌اید و برای شغل مورد علاقهٔ خود مصاحبه می‌دهید. تا اینجا از پس مصاحبه برآمده‌اید، اما فقط یک سؤال دیگر وجود دارد که باید به آن پاسخ دهید.

«آیا امکان دارد خطی که از مبدأ می‌گذرد از هیچ نقطهٔ گویای دیگری عبور نکند؟»

پنج جفت چشم مشتاقانه شما را تماشا می‌کنند و منتظر پاسخ شما هستند. آیا کار را به دست می‌آورید؟

شاید فکر کنید این مسائل فقط در داستان‌ها اتفاق می‌افتد، اما برای من اتفاق افتاد. ’نقاط گویا‘ نقاطی در صفحه هستند که مختصات آن‌ها اعداد گویا باشد. به‌عنوان مثال، $\left(\frac{12}{5}, -\frac{2}{3}\right)$، $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ و $(11,4)$ نقاط گویا هستند، اما $(4, \sqrt{2})$ و $(\pi, -1)$ نقاط گویا نیستند، زیرا $\sqrt{2}$ و $\pi$ گنگ‌اند. نقاط گویا برای نظریه‌پردازان اعداد و رمزنگاران مهم هستند و حتی در بطن یکی از مشهورترین قضایای ریاضی تمام دوران قرار دارند. اما سؤال پیش روی من مربوط به خطی بود که از مبدأ می‌گذرد، یعنی حداقل یک نقطهٔ گویا دارد؛ $(0,0)$. آیا می‌تواند از نقطهٔ گویای دیگری عبور نکند؟ من جواب را نمی‌دانستم، بنابراین باید در مورد آن فکر می‌کردم.

در ابتدا به نظر می‌رسد که پاسخ باید منفی باشد. در مجاورت هر نقطه در صفحهٔ مختصات، بی‌نهایت نقطهٔ گویا وجود دارد که به آن نزدیک هستند. با وجود نقاط گویای بسیار فشرده، غیرممکن به نظر می‌رسد که یک خط از همهٔ آن‌ها نگذرد.

اما، همان‌طور که معلوم خواهد شد، ممکن است.

نکتهٔ کلیدی مسئله تفکر دربارهٔ شیب خط است. ممکن است شیب را به‌عنوان ’صعود بر روی رانش‘ بشناسید که نسبت تغییر مختصات $y$ ’صعود‘ به تغییر مختصات $x$ ’رانش‘ است، همچنان که در طول خط حرکت می‌کنید. به‌عنوان مثال، اگر روی خطی با شیب $m$ قرار داشته باشید و مختصات $x$ خود را ۱ واحد افزایش دهید، باید مختصات $y$ را $m$ واحد افزایش دهید تا روی خط بمانید. این نحوهٔ سازوکار شیب است.

حال تصور کنید که از $(0,0)$ روی خطی با شیب $m$ شروع کنید. اگر ۱ واحد به‌سمت راست و $m$ واحد به‌سمت بالا حرکت کنید، در نقطهٔ $(1,m)$ قرار می‌گیرید. پس اگر $m$ گویا باشد، این خط باید از نقطهٔ گویای دیگری نیز عبور کند. در واقع، نقاط $(2,2m)$، $(3,3m)$ و غیره همگی باید روی خط باشند، که نشان می‌دهد اگر خطی که از مبدأ می‌گذرد، شیب گویا داشته باشد، در واقع از بی‌نهایت نقطهٔ گویا عبور می‌کند.

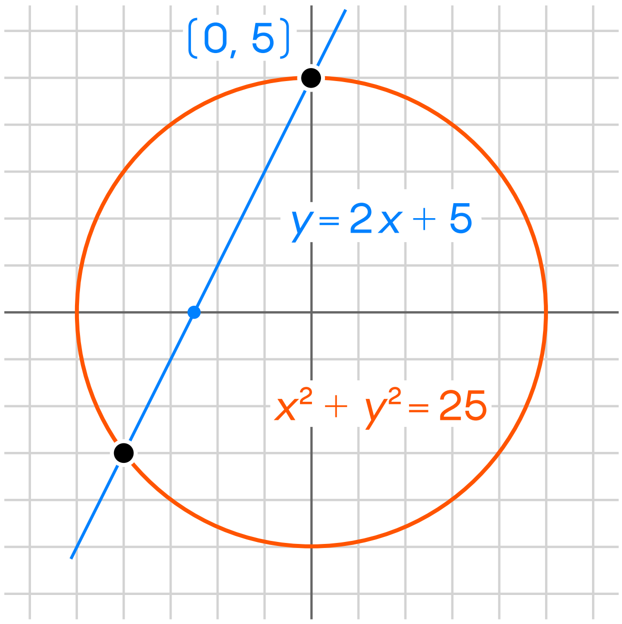
برای پاسخ به سؤال مصاحبه، شما باید خط‌هایی با شیب‌های گنگ در نظر بگیرید، زمانی که این کار را انجام دادید جواب بی‌درنگ به دست می‌آید. به‌عنوان مثال، خطی را که از مبدأ می‌گذرد با شیب $\sqrt{۲}$ در نظر بگیرید که معادلهٔ این خط به‌صورت $y = \sqrt{۲}x$ است. اگر نقطهٔ $(a,b)$ روی این خط قرار داشته باشد، آنگاه داریم $b = \sqrt{۲}a$، و مادامی که $a \neq ۰$ باشد، می‌توانیم آن را به‌صورت $\frac{a}{b} = \sqrt{۲}$ درآوریم. اگر $(a,b)$ نقطه‌ای گویا باشد، چنین چیزی غیرممکن است، زیرا سمت چپ این معادله زمانی که سمت راست معادله؛ $\sqrt{۲}$ گنگ است، نمی‌تواند گویا باشد. بنابراین هیچ نقطهٔ گویای دیگری روی این خط نمی‌تواند وجود داشته باشد. (یک تعمیم جالب از این سؤال که در تمرین‌ها به بررسی آن می‌پردازیم، این است که آیا خطی وجود دارد که از هیچ نقطهٔ گویایی عبور نکند؟)

فکر کردن دربارهٔ خطوط باعث شد کار را به دست آورم. اما ریاضیدان‌ها برای زمانی طولانی نقاط گویای خم‌ها را مطالعه کرده‌اند و هنوز در حال یادگیری ساختار پیچیدهٔ این نقاط هستند. برای درک این موضوع، بیایید نگاهی به چگونگی قرار گرفتن نقاط گویا روی دایره‌های موجود در صفحه بیندازیم. برای سادگی، فقط دایره‌هایی را به مرکز مبدأ با شعاع $r$ در نظر می‌گیریم که معادلات آن‌ها همیشه به‌صورت $x^۲ + y^۲ = r^۲$ هستند.

برخی از این دایره‌ها از هیچ نقطهٔ گویایی عبور نمی‌کنند، اما به طرز جالبی، اگر یک دایره حاوی یک نقطهٔ گویا باشد، آنگاه حاوی بی‌نهایت نقطهٔ گویاست. بیایید ببینیم چرا.

دایره‌ای را با شعاع ۵ که مرکز آن در مبدأ است، در نظر بگیرید. این دایره دارای معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ و دارای نقاط گویایی مانند $(۰,۵)$ و $(۳,۴)$ و همچنین نقاط دیگری مانند $(۲,\sqrt{۲۱})$ و $(\sqrt{۱۱},-\sqrt{۱۴})$ است. اما با دانستن تنها یک نقطهٔ گویا روی دایره می‌توانیم بی‌نهایت نقطهٔ گویای دیگر را پیدا کنیم. می‌توان از آنچه در مورد خطوط یاد گرفته‌ایم برای یافتن آن‌ها استفاده کرد.

خطی را تصور کنید که از نقطهٔ گویای $(۰,۵)$ روی دایره می‌گذرد، فرض کنید که خط دارای شیب گویاست، مثلاً ۲. این خط از نقطهٔ دومی روی دایره هم عبور می‌کند و این نقطهٔ تقاطع نیز باید گویا باشد.




کمی استفاده از جبر به ما نشان می‌دهد چرا. از آنجایی که خط دارای شیب ۲ و عرض از مبدأ ۵ است، می‌توانیم معادلهٔ آن را به‌صورت $y = ۲x + ۵$ بنویسیم. معادلهٔ دایره $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ است، پس برای یافتن نقاط تقاطع، دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۲۵ \\ y = ۲x + ۵ \end{cases}$$

یک روش برای حل این دستگاه جایگزینی است: از آنجایی که $y = ۲x + ۵$، می‌توانیم $۲x + ۵$ را به‌جای $y$ در معادلهٔ دایره جایگزین کنیم تا به دست آوریم:

$$x^۲ + (۲x + ۵)^۲ = ۲۵$$

ممکن است وسوسه شوید که این معادله را با استفاده از تکنیک مورد علاقهٔ خود حل کنید، اما قبل از انجام این کار، بیاید چند چیز را در این رابطه مشاهده کنیم.

اولاً، این یک معادلهٔ درجهٔ دوم است. معادلات درجهٔ دوم می‌توانند دو ریشه داشته باشند و ما یکی از این ریشه‌ها را از قبل می‌دانیم: از

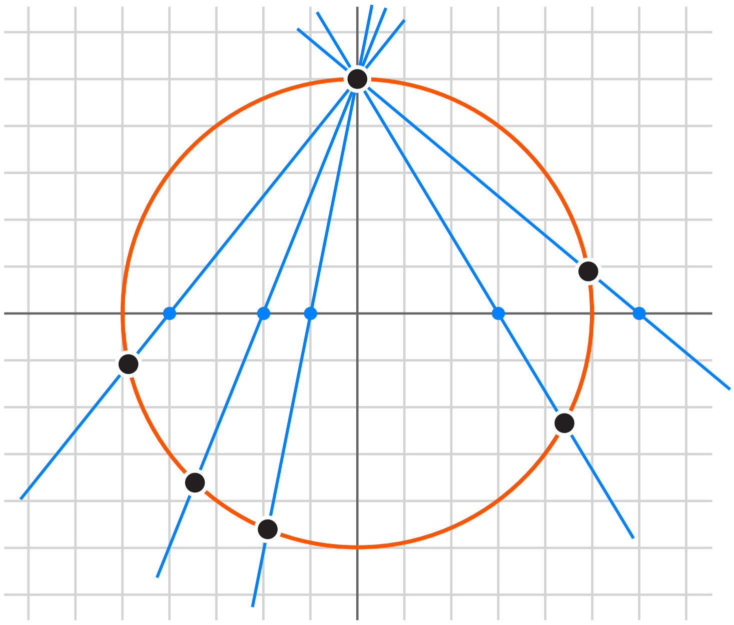
آنجایی که (۰،۵) نقطهٔ تلاقی خط و دایره است، $x = ۰$ باید جوابی برای معادلهٔ ما باشد. توجه داشته باشید که این جواب، گویاست.
ثانیاً، از آنجایی که همهٔ اعداد در معادله گویا هستند، وقتی معادلهٔ درجهٔ دوم خود را به‌شکل 'استاندارد' $ax^۲ + bx + c = ۰$ تبدیل کنیم، همهٔ ضرایب گویا خواهند بود. نتیجهٔ معروفی که به فرمول ویتا[1] معروف است می‌گوید که برای یک معادلهٔ درجهٔ دوم به‌شکل استاندارد، مجموع ریشه‌ها برابر با $\frac{-b}{a}$ است. در مورد معادلهٔ ما، حاصل این جمع عددی گویا است، بنابراین اگر یک ریشه گویا باشد، ریشهٔ دیگر نیز باید گویا باشد.
این بدان معنی است که هر دو نقطهٔ تقاطع دارای مختصات $x$ گویا هستند، بنابراین 'رانش' بین آن‌ها گویاست و از آنجایی که خط گذرنده از آن‌ها دارای شیب گویا است، پس 'صعود' آن‌ها نیز باید گویا باشد. این تضمین می‌کند که نقطهٔ دوم تقاطع دارای مختصات $y$ گویا است و آن را به نقطهٔ گویای دوم روی دایره تبدیل می‌کند.
در این مثال احتمالاً ساده‌تر می‌بود اگر فقط دستگاه معادلات را حل می‌کردیم و نقطهٔ تلاقی دیگر را پیدا می‌کردیم، که معلوم می‌شد نقطهٔ گویای $(-۳,-۴)$ است. اما استدلال فوق به‌خوبی تعمیم می‌یابد. هر خط $y = mx + b$ با شیب گویا را تصور کنید که از دایرهٔ ما در یک نقطهٔ گویا می‌گذرد. دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۲۵ \\ y = mx + b \end{cases}$$

معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را نتیجه می‌دهد

$$x^۲ + (mx + b)^۲ = ۲۵$$

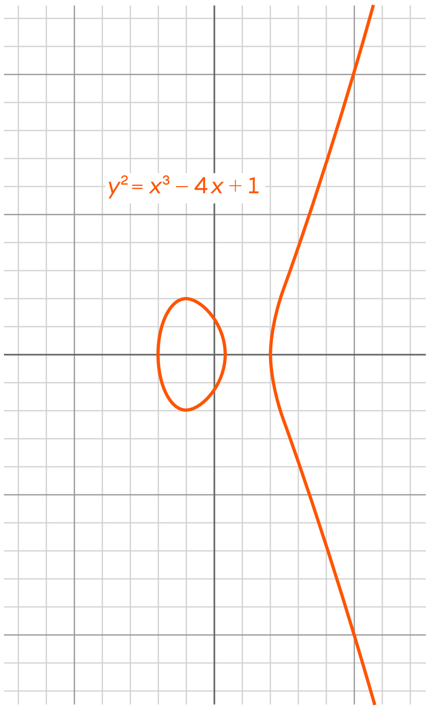
که همهٔ ضرایبش گویا هستند. با استدلال بالا، اگر این خط از دایره عبور کند، نقطهٔ تلاقی دیگر نیز باید گویا باشد. بنابراین اگر یک نقطهٔ گویا را روی یک دایره می‌شناسید، می‌توانید بی‌نهایت نقطهٔ گویای دیگر را فقط با در نظر گرفتن یک خط با شیب گویا، گذراندن آن از نقطهٔ گویای مدنظر و یافتن نقطهٔ تلاقی دیگر بیابید.



رویکرد مشابهی را می‌توان برای یافتن نقاط گویا روی خم‌های به اصطلاح بیضوی در نظر گرفت که خم‌های درجهٔ سوم هستند، با معادلاتی که دارای متغیرهایی هستند که بزرگ‌ترین توان آن‌ها ۳ است. این معادلات پیچیده‌تر از خطوط و دایره و برای نظریه‌پردازان اعداد و رمزنگاران بسیار جالب هستند.
مطالعهٔ خم‌های بیضوی حتی نقش مهمی در حل آخرین قضیهٔ فرما ایفا کرد؛ قضیه‌ای در مورد یافتن نقاط صحیح روی خم‌های خاص که توسط اندرو وایلز در دههٔ ۱۹۹۰ اثبات شد (حدود ۳۵۰ سال پس از ادعای معروف پیر دو فرما در حاشیهٔ یک کتاب ریاضی دربارهٔ اینکه اثبات زیبایی برای آن پیدا کرده است، اما حاشیهٔ کتاب برای نوشتنش بسیار کوچک است).
انواع مختلفی از خم‌های بیضوی وجود دارد. یک مثال ساده را در اینجا می‌توانید مشاهده کنید:

$$y^۲ = x^۳ - ۴x + ۱$$

و این نمودارش در صفحه است:




اگرچه واضح نیست، اما نقاط گویای زیادی روی این خم بیضوی وجود دارد. به‌عنوان مثال، (۰،۱) و (۴،۷) هر دو روی این منحنی قرار دارند، چون

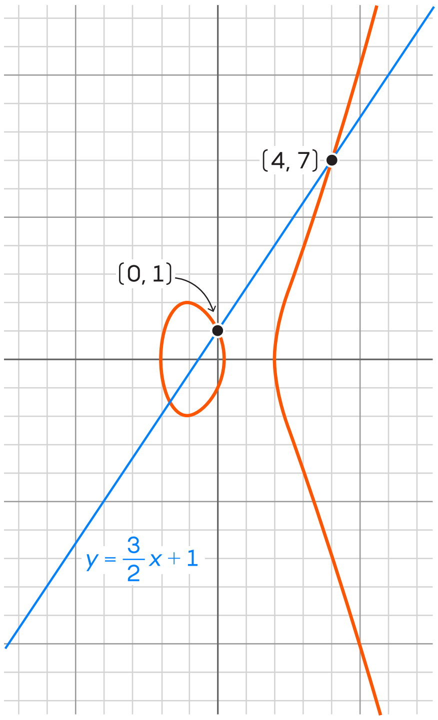
$$۱^۲ = ۰^۳ - ۴ \times ۰ + ۱$$

و

$$۷^۲ = ۴^۳ - ۴ \times ۴ + ۱$$

مانند دایره‌ها، روشی هوشمندانه برای استفاده از این نقاط گویای معلوم جهت یافتن نقاط گویای بیشتر روی منحنی وجود دارد و راز این کار نیز استفاده از خطوط است.

به‌راحتی می‌توان معادلهٔ خطی را که از (۰،۱) و (۴،۷) می‌گذرد یافت: شیب، تغییر $y$ نسبت به تغییر $x$ است یا $m = \frac{۷-۱}{۴-۰} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$ و از آنجایی که خط از (۰،۱) می‌گذرد، عرض از مبدأ آن ۱ است. پس معادلهٔ خطی که از آن دو نقطه می‌گذرد به‌صورت $y = \frac{۳}{۲}x + ۱$ است. در زیر می‌توانید نمودار خط به همراه خم بیضوی را مشاهده کنید:



توجه کنید که این خط، خم بیضی را سه بار قطع می‌کند: در $(۰,۱)$ و $(۴,۷)$ و یک نقطهٔ ناشناختهٔ سوم. معلوم می‌شود که نقطهٔ سوم نیز باید گویا باشد.

خم بیضوی و خط را به‌عنوان یک دستگاه معادلات در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y^۲ = x^۳ - ۴x + ۱ \\ y = \frac{۳}{۲}x + ۱ \end{cases}$$

می‌توان مانند کاری که با دایره و خط انجام دادیم، معادله را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$(\frac{۳}{۲}x + ۱)^۲ = x^۳ - ۴x + ۱$$

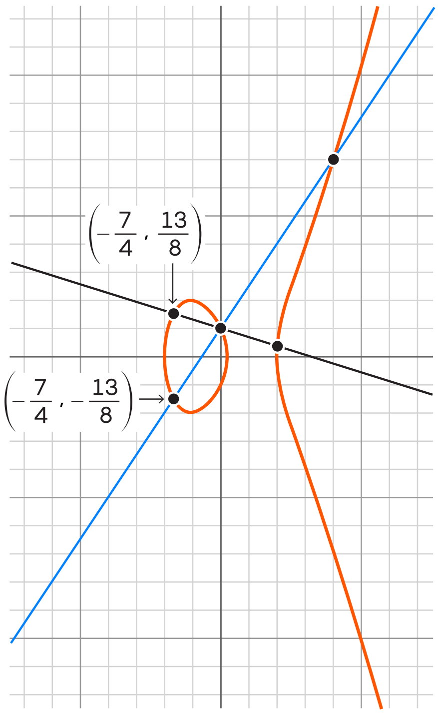
این یک معادلهٔ درجهٔ سوم با ضرایب گویاست. یک معادلهٔ درجهٔ سوم می‌تواند تا سه جواب حقیقی داشته باشد، که منطقی است، زیرا ما به‌دنبال سه نقطهٔ تقاطع هستیم. ما قبلاً دو تا از آن جواب‌ها را می‌دانیم $x = ۰$ که مربوط به نقطهٔ $(۰,۱)$ و $x = ۴$ که مربوط به نقطهٔ $(۴,۷)$ است.

پس می‌دانیم که دو تا از سه جواب گویا هستند. جواب سوم چطور؟ خوب، درست همان‌طور که در معادلهٔ درجهٔ دوم دیدیم، در معادلهٔ درجهٔ سوم نیز فرمول ویتا تضمین می‌کند که مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم باید گویا باشد. درنتیجه اگر مجموع دو ریشه گویا باشد، ریشهٔ سوم نیز باید گویا باشد.

این راه‌حل به ما در پیدا کردن یک نقطهٔ گویای جدید در خم بیضوی کمک می‌کند. حل معادله و یافتن سومین نقطهٔ تقاطع که $\left(-\frac{۷}{۴}, -\frac{۱۳}{۸}\right)$ است، کار سختی نیست. همانند دایره، این استدلال نیز تعمیم می‌یابد: اگر خطی خم بیضوی ما را در دو نقطهٔ گویا قطع کند، اگر تلاقی سومی وجود داشته باشد، باید گویا باشد.

این تکنیک، به‌ویژه در ترکیب با یکی دیگر از ویژگی‌های جالب این خم بیضوی مفید است. توجه کنید که نمودار نسبت به محور $x$ متقارن است: نیمهٔ پایینی منحنی بازتابی از نیمهٔ بالایی است. از نظر جبری به این معنی است که اگر نقطهٔ $(a,b)$ روی منحنی باشد، نقطهٔ $(-a,b)$ نیز باید روی منحنی باشد. بنابراین، اگر $\left(-\frac{۷}{۴}, -\frac{۱۳}{۸}\right)$ روی منحنی قرار داشته باشد، $\left(-\frac{۷}{۴}, \frac{۱۳}{۸}\right)$ نیز باید وجود داشته باشد.

این تقارن چیزی بیش از یک نقطهٔ گویای دیگر روی منحنی به ما می‌دهد، یک جفت نقطهٔ جدید که می‌توان از آن خطی را گذراند.




خطی که از نقاط گویای $\left(-\frac{۷}{۴}, \frac{۱۳}{۸}\right)$ و $(۰,۱)$ می‌گذرد، یک نقطهٔ گویای دیگر روی منحنی ایجاد می‌کند. ما می‌توانیم آن نقطه را بازتاب دهیم، رویهٔ خود را تکرار کنیم و به یافتن نقاط گویای بیشتری ادامه دهیم. این رویه توسط ریاضیدانان برای ایجاد رمزنگاری خم بیضوی استفاده شده است که ابزاریست برای ایجاد کدهای رمز که ساختار این نقاط گویا روی خم‌های بیضوی را به کار می‌گیرد.

استفاده از این روش برای یافتن نقاط گویا روی منحنی آسان است، اما اگر فقط یک نقطهٔ گویا به شما داده شود، تشخیص اینکه این رویه دقیقاً از کجا شروع شده است، دشوار است. این نوع فرایندی که به‌سختی قابل بازگشت است، برای ایجاد کدهای رمز ایمن ضروریست. ساختار غنی نقاط گویا روی خم‌های بیضوی، یک حوزهٔ فعال از پژوهش‌های ریاضی است. با شروع از نقطهٔ $(۰,۱)$ فهرستی نامتناهی از نقاط گویا روی منحنی $y^۲ = x^۳ - ۴x + ۱$ ایجاد کردیم که هر کدام می‌توانند نقطهٔ گویای دیگری را به ما نشان دهند. اما موارد بیشتری وجود دارد. نقطهٔ گویای $(-۱,۲)$ روی منحنی قرار دارد، اما در این فهرست نیست و ما می‌توانیم از آن برای تولید مجموعهٔ نامتناهی دوم از نقاط گویا روی $y^۲ = x^۳ - ۴x + ۱$ استفاده کنیم. معلوم می‌شود که هر نقطهٔ گویا روی این منحنی ترکیبی از این دو نقطهٔ آغازین است که بدین معنی است که 'رتبهٔ' منحنی دو است:

دو نقطهٔ آغازین تمام چیزی است که برای ایجاد همهٔ بی‌نهایت نقطهٔ گویا روی منحنی لازم است. ریاضیدانان فعالانه در حال مطالعهٔ رتبهٔ خم‌هایی مانند این هستند و در حال حاضر مشخص نیست که آیا حداکثر رتبهٔ ممکن برای خم‌های بیضوی وجود دارد یا خیر.

از جستجوی جواب‌های صحیح برای معادلات از ۲۰۰۰ سال پیش تا آخرین قضیهٔ فرما تا رمزنگاری خم بیضوی امروزی، مطالعهٔ نقاط گویا با جبر و هندسهٔ دبیرستان شروع و با روشی زیبا و رضایت‌بخش به ریاضیات پیشرفته منتهی می‌شود و حتی ممکن است به شما کمک کند شغل رویایی خود را به دست آورید!

### تمرین‌ها:

**۱.** معادلهٔ خطی را بنویسید که از هیچ نقطهٔ گویایی عبور نمی‌کند.

**۲.** نقاط $(۰,۱)$ و $(۴,-۷)$ هر دو روی منحنی $y^۲ = x^۳ - ۴x + ۱$ قرار دارند و معادلهٔ خط بین آن‌ها $y = -۲x + ۱$ است و دستگاه معادلات آن به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} y^۲ = x^۳ - ۴x + ۱ \\ y = -۲x + ۱ \end{cases}$$

که تنها دو جواب حقیقی متمایز دارد. چرا این در تضاد با مطالب بالا نیست؟

**۳.** نشان دهید که دایره‌ای با معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۳$ از هیچ نقطهٔ گویایی عبور نمی‌کند.

**۴.** سومین نقطهٔ تقاطع بین خطی که از $\left(-\frac{۷}{۴}, \frac{۱۳}{۸}\right)$ و $(۰,۱)$ می‌گذرد و منحنی $y^۲ = x^۳ - ۴x + ۱$ چیست؟ (هشدار: فقط برای عاشقان جبر و حساب!)

### پاسخ‌ها:

**۱.** یک پاسخ ساده $y = \sqrt{۲}$ است. مؤلفهٔ $y$ برای هر نقطه روی این خط $\sqrt{۲}$ است، پس هیچ نقطه‌ای نمی‌تواند گویا باشد. پاسخی جالب‌تر خط $x + y = \sqrt{۲}$ است. آیا می‌بینید که چرا خط دوم شامل هیچ نقطهٔ گویایی نیست؟

**۲.** خط $y = -۲x + ۱$ در نقطهٔ $(۰,۱)$ بر خم بیضوی مماس است، پس معادلهٔ درجهٔ سوم $(-۲x + ۱)^۲ = x^۳ - ۴x + ۱$ در $x = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد. این معادله با ساده کردن و فاکتورگیری به‌راحتی حل می‌شود:

$$(-۲x + ۱)^۲ = x^۳ - ۴x + ۱$$
$$۴x^۲ - ۴x + ۱ = x^۳ - ۴x + ۱$$
$$۰ = x^۳ - ۴x^۲$$
$$۰ = x^۲(x - ۴)$$

چون $x^۲$ در عاملی از معادلهٔ درجهٔ سوم ظاهر شده است، جواب $x = ۰$ از مرتبهٔ ۲ است. در واقع به این روش، فرایند پیدا کردن نقاط گویا روی یک خم بیضوی را شروع می‌کنید: یک نقطهٔ گویا پیدا کنید، سپس معادلهٔ خط مماس را به دست آورید و ببینید که این خط دوباره در چه نقطه‌ای منحنی را قطع می‌کند. چون نقطه‌ی تماس ریشهٔ مضاعف است، ریشهٔ سوم که متناظر با نقطهٔ تقاطع است باید گویا باشد.

**۳.** فرض کنید که نقطهٔ گویای $\left(\frac{m}{n},\frac{p}{q}\right)$ روی دایره قرار داشته باشد به‌طوری که $m$، $n$، $p$ و $q$ همگی اعداد صحیح، $\frac{m}{n}$ و $\frac{p}{q}$ ساده‌نشدنی و $n$ و $q$ مثبت هستند. در این صورت داریم $\left(\frac{m}{n}\right)^۲+\left(\frac{p}{q}\right)^۲=۳$.

ابتدا نشان می‌دهیم که $n=q$. داریم $m^۲+n^۲\left(\frac{p}{q}\right)^۲=۳n^۲$ و چون $۳n^۲$ و $m^۲$ هر دو عدد صحیح هستند، پس $n^۲\left(\frac{p}{q}\right)^۲$ نیز صحیح است. چون $p$ و $q$ عامل مشترکی ندارند، $q$ باید $n$ را عاد کند. استدلالی مشابه برای معادلهٔ $q^۲\left(\frac{m}{n}\right)^۲+p^۲=۳q^۲$ نشان می‌دهد که $n$ باید $q$ را عاد کند. چون $n$ و $q$ هر دو اعداد صحیح مثبت هستند که یکدیگر را عاد می‌کنند، داریم $n=q$.

پس $\left(\frac{m}{n}\right)^۲+\left(\frac{p}{n}\right)^۲=۳$ و بنابراین $m^۲+p^۲=۳n^۲$. توجه کنید که سمت راست این معادله به ۳ بخش‌پذیر است، پس سمت چپ نیز باید به ۳ بخش‌پذیر باشد. حقیقتی جالب دربارهٔ مربع‌های کامل این است که هر مربع کامل به‌صورت $۳k$ یا $۳k+۱$ است (این را می‌توان با استفاده از حساب پیمانه‌ای اثبات کرد). پس تنها راهی که مجموع دو مربع کامل بتواند مضربی از ۳ باشد آن است که هر کدام از آن‌ها مضرب ۳ باشد.

بنابراین $m^۲$ و $p^۲$ بر ۳ بخش‌پذیر هستند. چون ۳ عددی اول است، پس $m$ و $p$ بر ۳ بخش‌پذیر بوده و سمت چپ معادله بر ۹ بخش‌پذیر می‌شود. این بدان معنی است که سمت راست معادله بر ۹ بخش‌پذیر است، پس باید $n$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد. اما این برخلاف فرض ساده‌نشدنی بودن $\frac{m}{n}$ است. درنتیجه هیچ نقطهٔ گویایی روی $x^۲+y^۲=۳$ وجود ندارد.

یک تعمیم جالب و چالش‌برانگیز از این مسئله این است: به‌ازای چه مقادیری از $k$، منحنی $x^۲+y^۲=k$ از هیچ نقطهٔ گویایی نمی‌گذرد؟

**۴.** $\left(\frac{۹۲}{۴۹},\frac{۱۱۳}{۳۴۳}\right)$. معادلهٔ خط به‌صورت $y=-\frac{۵}{۱۴}x+۱$ است. برای پیدا کردن مؤلفهٔ $x$، معادلهٔ $\left(-\frac{۵}{۱۴}x+۱\right)^۲=x^۳-۴x+۱$ را حل کنید. راستش را بخواهید من این کار را با Wolfram Alpha انجام دادم.

**مرجع:**
https://www.quantamagazine.org/how-simple-math-reveals-rational-points-on-curves-20210722/

[1] Vieta's formula

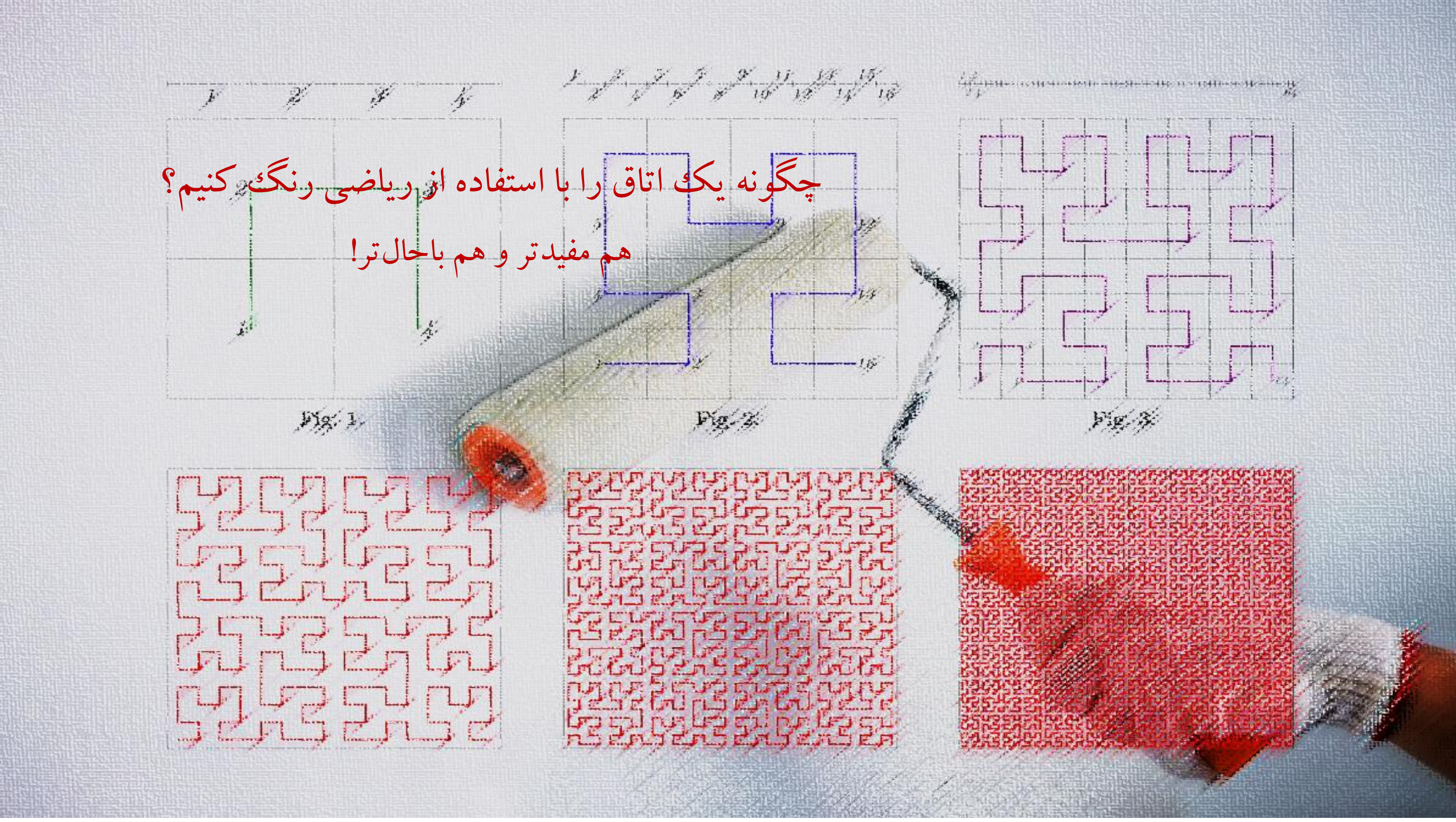
## یکی از کوتاه‌ترین مقاله‌های چاپ‌شده!

### اثباتی از قضیهٔ لیوویل

تابعی هارمونیک و کراندار را روی فضای اقلیدسی در نظر بگیرید. چون این تابع هارمونیک است، پس مقدار آن به‌ازای هر نقطه با مقدار متوسط آن روی هر کره به مرکز آن نقطه و درنتیجه روی هر گوی به مرکز آن نقطه برابر است. فرض کنید دو نقطه داده شده باشد. دو گوی به مرکز نقاط داده‌شده و شعاع یکسان انتخاب کنید. اگر شعاع گوی‌ها به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، دو گوی یکی می‌شوند به‌جز نسبت به‌دلخواه کوچکی از حجمشان. چون تابع کراندار است، مقدار متوسط روی هر دو گوی به اندازهٔ دلخواه به هم نزدیک هستند و بنابراین تابع، مقدار یکسانی در هر دو نقطه اتخاذ می‌کند. بدین‌ترتیب یک تابع هارمونیک کراندار روی فضای اقلیدسی، تابعی ثابت است.

**مرجع:**

E. Nelson, "A Proof of Liouville's Theorem", Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961) 995.



# چگونه یک اتاق را با استفاده از ریاضی رنگ کنیم؟

## هم مفیدتر و هم باحال‌تر!

**مترجم: مونس تابان‌رو**

دانش‌آموختهٔ کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهید بهشتی

وقتی پروژهٔ امروزتان رنگ‌آمیزی یک اتاق باشد، احتمالاً سراغ ماشین حساب نخواهید رفت و اگر هم پای مسائل ریاضی به بحث باز شود همان چیزهایی خواهد بود که از دبستان یاد گرفتید: تخمین زدن مساحت دیواری که می‌خواهید رنگ کنید، تقسیم مقدار به‌دست‌آمده به مساحتی که هر رنگ می‌تواند پوشش دهد و از این قبیل چیزها!

اما اگر یک ریاضیدان باشید چه؟ آیا می‌شود از ریاضیات پیشرفته برای سریع‌تر و مفیدتر انجام دادن کار بهره برد؟ برویم که پی ببریم.

اولین چیزی که باید در نظر بگیریم سرعت است! در مواجهه با این رویکرد ریاضیاتی، ثابت مسئله، ضخامت مناسب رنگ خواهد بود. شما نمی‌توانید تعداد لایه‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی دیوار مورد نظرتان را تغییر بدهید و باید برای هر اینچ مربع از دیوارتان به ضخامت کافی از رنگ استفاده کنید، نه یک رنگ‌آمیزی سریع و لکه‌دار و آن را روشی سریع‌تر نامیدن.

با تعیین پارامترهای مسئله هم نمی‌شود خیلی سرعت را بهبود بخشید. برخلاف مسائل بهینه‌سازی در آبیاری یا حتی چمن‌زنی، هم‌پوشانی رنگ‌ها مشکلی ایجاد نخواهد کرد. شما می‌توانید غلتک رنگ را بلند کرده و در هر زمان و مکانی آن را پایین بیاورید. سعی کنید این کار را با دستگاه چمن‌زنی امتحان کنید.

پس تا زمانی که به‌طور پیوسته رنگ را با ضخامت مناسب روی دیوار می‌زنید، مقدار رنگ مصرفی و مدت‌زمانی که رنگ‌آمیزی به طول می‌انجامد براساس ناحیه‌ای است که شما در حال رنگ‌آمیزی آن هستید و همچنین سرعت انجام کارتان. کلاس‌های ریاضی این موارد را تغییر نمی‌دهند، اما این بدان معنا نیست که داشتن کمی دانش پیچیدهٔ ریاضیاتی نمی‌تواند در تقویت مهارت‌های رنگ‌آمیزی‌تان کمک کند. در این خصوص، منحنی‌های هیلبرت را در نظر بگیرید.

دیوید هیلبرت یک ریاضیدان آلمانی بود که در حوالی قرن بیستم دستاوردهای علمی بی‌شماری از خود به جای گذاشت. او معروف است که مجموعه‌ای از چالش‌برانگیزترین مسائل ریاضی آن زمان را ارائه کرده، فهرستی که امروزه با نام مسائل هیلبرت شناخته می‌شود و تعدادی از آن‌ها هنوز حل‌نشده باقی مانده‌اند. نام هیلبرت در تمامی کتب ریاضی مدرن دیده می‌شود و منحنی‌های هیلبرت که در سال ۱۸۹۱ تعریف شده‌اند، از جمله اکتشافات وی هستند. آن‌ها مجموعهٔ مثال‌هایی هستند که به‌خوبی برای متخصصان ریاضی، هنرمندان و مهندسان شناخته شده‌اند. برای مثال می‌توانید مشخصات چاپ سه‌بعدی مسیر مخصوص برای حرکت مهره به‌شکل منحنی هیلبرت را مشاهده کنید.

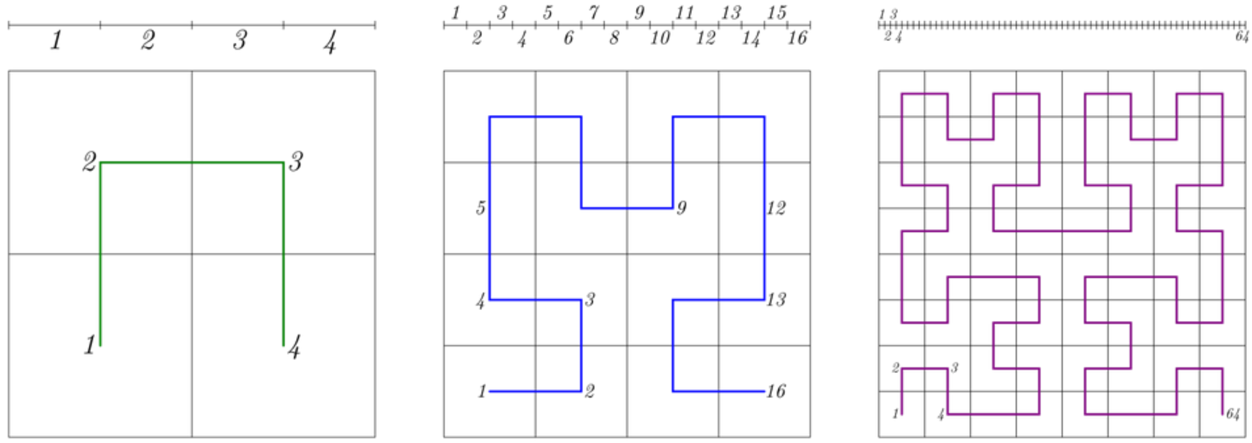
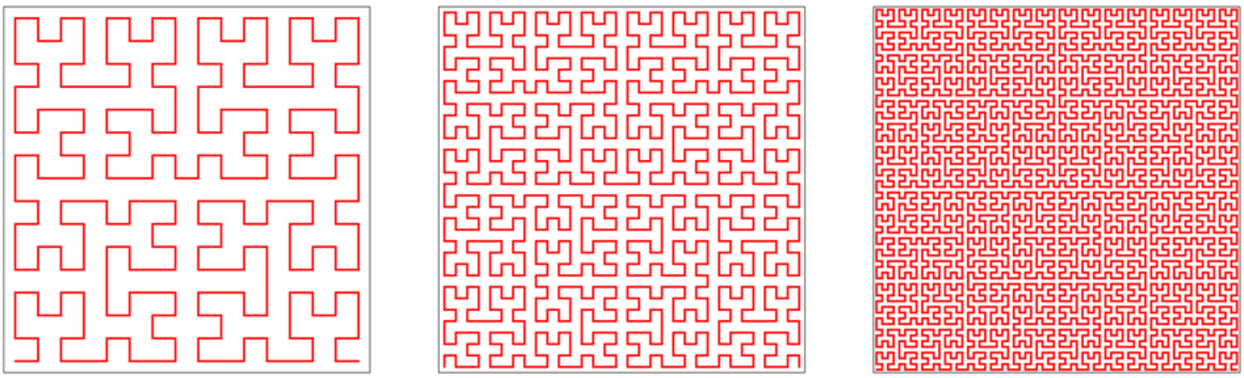
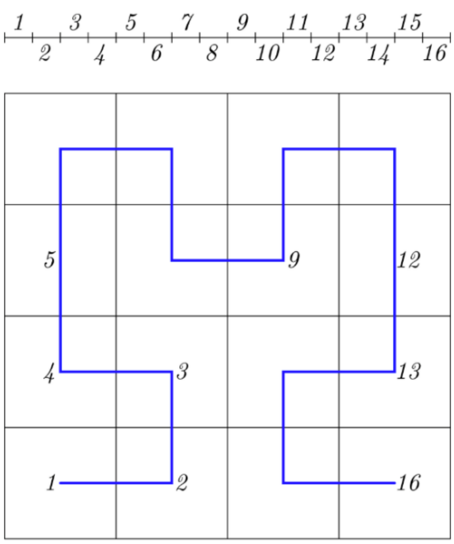


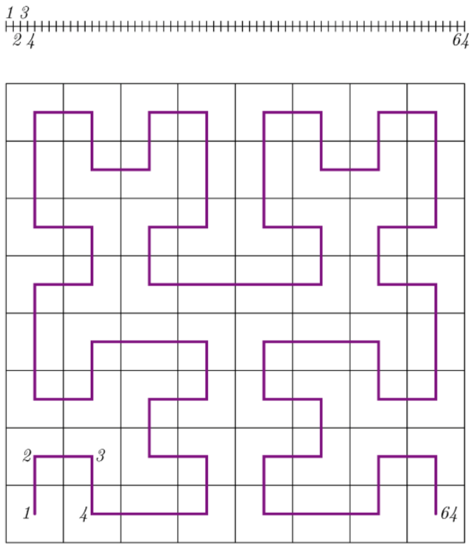
Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.



اساساً منحنی‌های هیلبرت، دنبالهٔ خاصی از مسیرهای زیگزاگی است که در درون یک ناحیه مربع‌شکل قرار گرفته‌اند (همان‌طور که در تصویر بالا نشان داده شده است). اولین منحنی هیلبرت که در تصویر بالا به رنگ سبز نمایش داده شده است، $H_1$ نامیده می‌شود و شکل آن مانند یک $U$ ساده است. منحنی دوم که به رنگ آبی است، $H_2$ نامیده می‌شود، منحنی سوم هم $H_3$ و به همین ترتیب تا آخر. اما صبر کنید! این خطوط که منحنی‌شکل به نظر نمی‌رسند! نکته‌ای که باید به یاد داشته باشید این است که اصطلاح 'منحنی' در ریاضیات، بیشتر انتزاعی است و می‌تواند شامل پاره‌خط‌ها و زوایای قائمه نیز باشد. نکتهٔ کلیدی منحنی‌های ریاضیاتی این است که جداناشدنی هستند. آن‌ها از نقطهٔ شروع تا نقطهٔ پایان به‌صورت یک خط موجدار پیوسته هستند.

زمانی که به اولین منحنی‌های هیلبرت نگاه می‌کنید، ممکن است متوجه یک سری الگو شوید و هرچه بیشتر این روند ادامه داشته باشد، الگوهای بیشتری هم وجود خواهند داشت. اول از همه، آیا چهار نسخه از $H_1$ در $H_2$ را مشاهده می‌کنید؟ هر کدام از دو نسخهٔ پایینی ۹۰ درجه چرخیده‌اند و پاره‌خط‌هایی اضافه شده است تا همه چیز به هم متصل شود.





حال به همین رابطه بین دو مورد بعدی توجه کنید: چهار نسخه از $H_۲$ در $H_۳$ وجود دارد، $H_۳$ چهار بار در $H_۴$ ظاهر می‌شود و به همین شکل تا انتها پیش می‌روند.

در یک کلام، منحنی‌های هیلبرت این‌گونه ساخته می‌شوند: منحنی هیلبرت $H_n$ از چهار نسخه منحنی هیلبرت $H_{n-۱}$ ساخته می‌شود که هر کدام به اندازهٔ یک‌چهارم کوچک شده و سه پاره‌خط کوچک برای اتصال همهٔ نسخه‌ها به آن اضافه می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان گفت: هر $H_n$ای را که در نظر بگیرید و در یکی از چهار قسمت تصویر آن زوم کنید، در حال تماشای $H_{n-۱}$ خواهید بود (که شاید ۹۰ درجه چرخیده است). این مورد همان اصل معروف خودمتشابهی در ریاضی است، یعنی زمانی که یک شیء ریاضی با بخش‌هایی از خودش برابر یا معادل باشد. شناخته‌شده‌ترین شیء خودمتشابه در ریاضی، فراکتال‌ها هستند و منحنی‌های هیلبرت نیز به این فراکتال‌ها شباهت دارند.

ریاضیات در پسِ فراکتال‌ها بسیار پیچیده می‌شود. به‌طور کلی فراکتال‌ها اشیایی هستند که خودشان را در بر می‌گیرند. هنگامی که تصویر یک فراکتال را بزرگ‌نمایی کنید، فراکتال بیشتری مشاهده می‌کنید و فرقی نمی‌کند که چقدر زوم کرده باشید. به همین دلیل است که بزرگ‌نمایی و رنگ‌آمیزی فراکتال‌ها توسط رایانه‌ها یک امر رایج است و نرم‌افزارهای مختلفی برای این کار وجود دارند.

از نظر فنی، بلوک‌های سازندهٔ $H_n$ فراکتال نیستند، به این دلیل که در آزمونِ 'مهم نیست چقدر بزرگ‌نمایی کنید' شکست می‌خورند. اما حد ریاضیاتی آن‌ها – منحنی‌های هیلبرت - یک فراکتال محسوب می‌شود. متأسفانه، رنگ‌آمیزی منحنی هیلبرت غیرممکن است چراکه یک شیء نامتناهی و انتزاعی در ریاضی است.

ظرافت‌ها در این مرحله محرمانه و پنهان هستند، بنابراین اگر به ریاضیات پیشرفتهٔ فراتر از آنچه تا اینجا دیدیم علاقه‌مند هستید، از این ویدیوی عالی از یوتیوبر ریاضی 3Blue1Brown لذت ببرید:

https://youtu.be/3s7h2MHQtxc

منحنی‌های هیلبرت در علوم کامپیوتر نیز ظاهر می‌شوند و به‌راحتی می‌توان چرایی آن را فهمید. ابتدا توجه کنید که $H_۱$ از مرکز هر چهار مربع در یک شبکهٔ ۲ × ۲ به‌صورت مارپیچ عبور می‌کند. سپس $H_۲$ به هر یک از ۱۶ مربع در یک شبکهٔ ۴ × ۴ برخورد می‌کند. در نهایت در حالت کلی داریم: منحنی $H_n$ از هر $۴n$ مربع در یک شبکهٔ $۲n \times ۲n$ به‌صورت مارپیچ عبور می‌کند. وقتی که $n$، عدد ۴ یا ۵ باشد، $۴n$ به ۲۵۶ یا ۱۰۲۴ تبدیل می‌شود که سرنخی بزرگ برای برنامه‌های کامپیوتری است. ویدیوی 3Blue1Brown برخی از این موارد را بررسی می‌کند.

با گذشت زمان، برخی از مسئله‌ها توسط منحنی‌های هیلبرت درک و به‌خوبی حل شده‌اند. هر موقعیتی که شامل نمایش یک آرایهٔ خطی در فضای ۲بعدی (یا بالاتر) باشد، به‌طور طبیعی متناسب است. این حالت در کاریکاتور معروف xkcd دیده می‌شود که ۲۵۶ زیرشبکهٔ IPv4 را شبکه‌بندی می‌کند - به کدهای منطقه‌ای اینترنت فکر کنید (شکل صفحهٔ بعد).

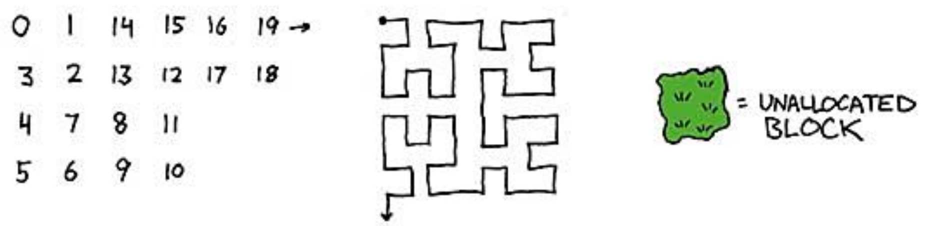
با حرکت در امتداد منحنی هیلبرت $H_۴$، اعداد متوالی همیشه به هم متصل می‌شوند، بنابراین این منطقی‌ترین راه برای چیدمان ۲۵۶ عدد در یک شبکهٔ ۱۶ × ۱۶ است.

روی هم رفته، اگر دیوار خود را در مسیر یک منحنی هیلبرت رنگ کنید، چندین اتفاق جالب رخ می‌دهد. از آنجایی که هیچ گسستی وجود ندارد، از ابتدا تا انتها در یک مسیر پیوسته نقاشی خواهید کرد. با ماندن در یک منطقهٔ کلی در هر لحظه، به‌طور بالقوه حرکات بدن شما را کاهش می‌یابد. همچنین اگر با سرعت ثابتی رنگ‌آمیزی کنید، به همان مقدار زمان صرف خواهید کرد. فقط خودتان را درگیر فهمیدن اینکه مسیر بعدی به کدام سمت خم می‌شود، نکنید!

**مرجع:**

https://www.popularmechanics.com/science/math/a29862279/paint-room-using-math/


این نقشه فضای آدرس IP را در یک صفحه، با استفاده از نقشهٔ فراکتالی نشان می‌دهد که گروه‌بندی را حفظ می‌کند؛ یعنی هر رشتهٔ متوالی IPها به یک منطقهٔ تنها، فشرده و همبند روی نقشه ترجمه خواهد شد. هر یک از ۲۵۶ بلوک شماره‌گذاری‌شده، نشان‌دهندهٔ یک از ۸ زیرشبکه است (شامل تمام IPهایی که با آن شماره شروع می‌شوند). بخش بالا سمت چپ، نشان‌دهندهٔ بلوک‌هایی است که به‌طور مستقیم به شرکت‌ها و دولت‌ها در دههٔ ۱۹۹۰ فروخته شده است، قبل از اینکه RIRها تخصیص را برعهده بگیرند.



# دنیای بی‌حد و مرز دستگاه‌های اعداد

**$p$-ادیک‌ها گردایه‌ای نامتناهی از دستگاه‌های اعداد براساس اعداد اول را شکل می‌دهند. آن‌ها در قلب نظریهٔ اعداد جدید قرار دارند.**

**مترجم: مائده بادان‌فیروز**
دانش‌آموختهٔ کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهید بهشتی

اعداد گویا آشناترین گونهٔ اعداد هستند: ۱، ۵−، ۱/۲ و هر مقدار دیگری که بتوان به‌صورت یک کسر مثبت یا منفی از اعداد صحیح نوشت. اما کار کردن با این اعداد همچنان می‌تواند سخت باشد. مشکل این است که اعداد گویا حفره‌هایی دارند. اگر یک دنباله از اعداد گویا را بزرگنمایی کنید، ممکن است به عددی نزدیک شوید که خودش گویا نیست. این مسئله، بر مدار بسیاری از ابزارهای پایه‌ای ریاضی همانند بخش بزرگی از حسابان می‌چرخد.

ریاضیدان‌ها معمولاً این مسئله را با چیدن اعداد گویا روی یک خط و پر کردن شکاف‌های آن با اعداد گنگ حل می‌کنند تا یک دستگاه کامل از اعداد بسازند که ما آن را اعداد حقیقی می‌نامیم.

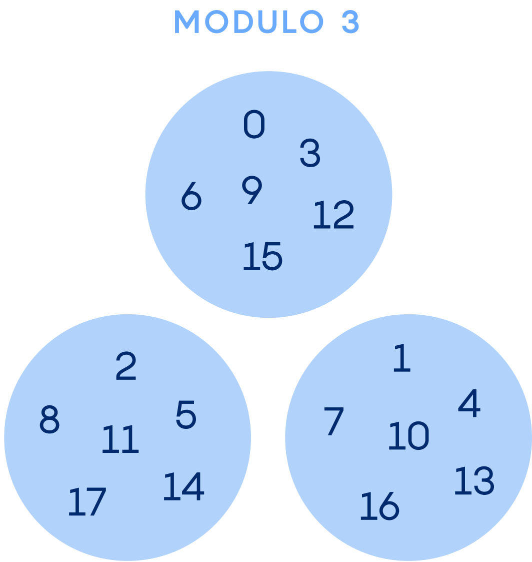
اما راه‌های دیگری هم برای چیدمان اعداد گویا و پر کردن شکاف‌هایش وجود دارد: اعداد $p$-ادیک[1]. آن‌ها گردایه‌ای نامتناهی از دستگاه‌های اعداد جایگزین هستند که هر کدام به یک عدد اول منحصربه‌فرد وابسته‌اند. مانند ۲-ادیک‌ها، ۳-ادیک‌ها، ۵-ادیک‌ها و به همین ترتیب.

$p$-ادیک‌ها می‌توانند کاملاً غریب و بیگانه به نظر برسند. مثلاً در ۳-ادیک‌ها، ۸۲ خیلی به ۱ نزدیک‌تر است تا ۸۱. اما این غریبگی تا حدود زیادی ظاهری است: در سطح ساختاری، $p$-ادیک‌ها از تمام قوانینی که ریاضیدان‌ها از یک دستگاه خوش‌رفتار انتظار دارند، پیروی می‌کنند.

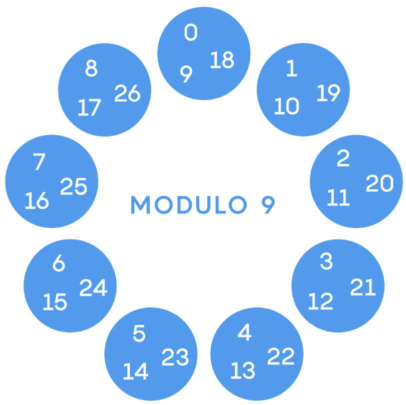
بیش از یک قرن پیش آشکار شد که اعداد $p$-ادیک به چینشی اساسی تبدیل شده‌اند که در آن مسائلی دربارهٔ اعداد گویا که به هزاران سال قبل برمی‌گردد، بررسی می‌شود.

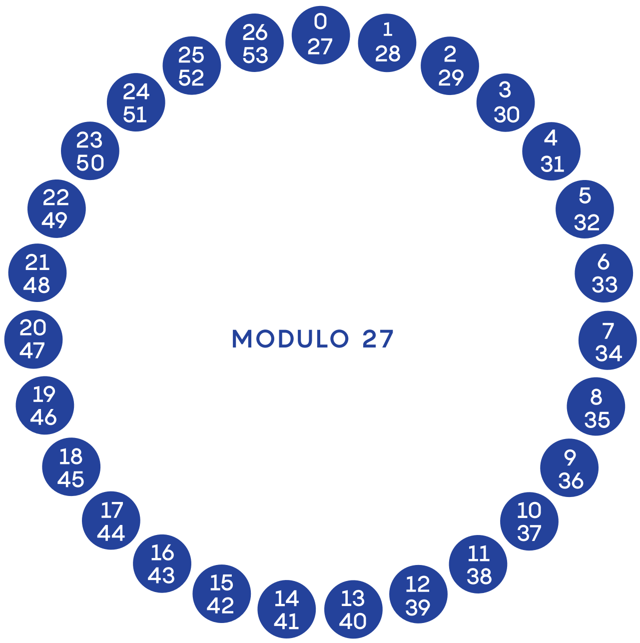
### ساختن برج

اعداد $p$-ادیک براساس حساب پیمانه‌ای هستند که یک روش شمارش است که مانند یک ساعت می‌چرخد و به خودش برمی‌گردد. همان‌طور که ساعت ۱۳:۰۰ در ساعت ۲۴ساعته، ۱ بعد از ظهر است، ریاضیدان‌ها نیز می‌گویند که ۱۳ ‘به پیمانهٔ ۱۲’ برابر با یک است. برای دیدن اینکه اعداد $p$-ادیک چگونه از حساب پیمانه‌ای ساخته می‌شوند، با دسته‌بندی کردن تمام اعداد صحیح به پیمانهٔ یک عدد اول مشخص شروع کنید. مثلاً دسته‌بندی اعداد صحیح به پیمانهٔ ۳، آن‌ها را به ۳ دسته تقسیم می‌کند.




همچنین می‌توانید اعداد صحیح را به پیمانهٔ توان‌های بالاتر از ۳ هم دسته‌بندی کنید؛ پیمانهٔ ۹ (۳$^{۲}$) یا ۲۷ (۳$^{۳}$).

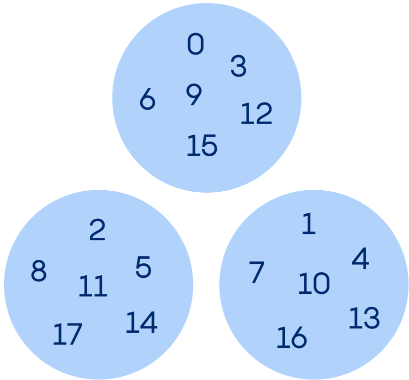


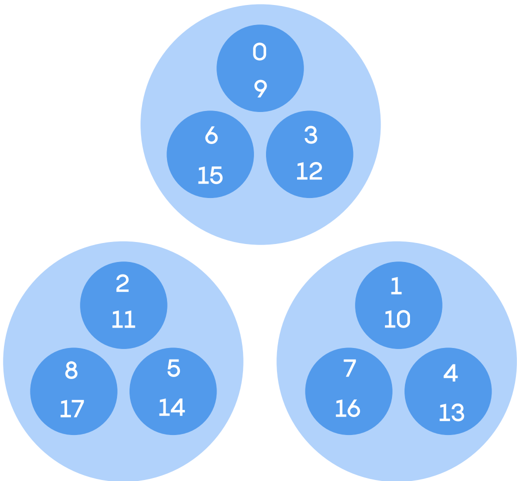

ریاضیدان‌ها اعداد صحیح به پیمانهٔ توان‌های ۳ را مرتب می‌کنند تا خواص تجزیه به عامل‌های اولشان را بشناسند: اعداد صحیحی که به پیمانهٔ ۳ با صفر برابر هستند در یک کلاس قرار دارند و حداقل یک ۳ در تجزیهٔ به عامل‌های اولشان دارند؛ اعداد صحیحی که به پیمانهٔ ۹ با صفر برابر هستند حداقل دو تا ۳ دارند و اعداد صحیحی که به پیمانهٔ ۲۷ برابر با صفر هستند حداقل سه تا ۳ دارند.

حال تصور کنید اعداد صحیح به پیمانهٔ ۳، ۹ و ۲۷ مانند یک برج روی هم انباشته شده‌اند. هر طبقه از این برج دقیقاً یک پوشش سه‌بخشی از طبقهٔ زیرین آن است. این الگو تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد و یک چینش زیبا از اعداد صحیح به پیمانهٔ توان‌های ۳ می‌دهد.

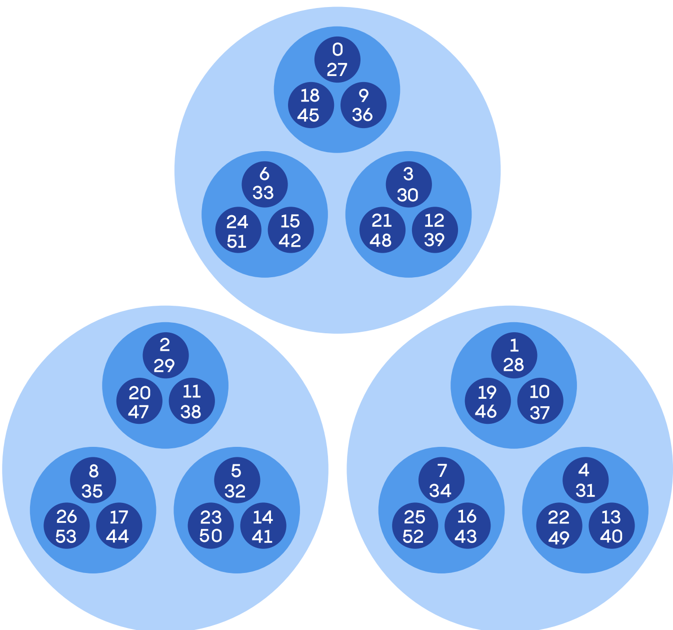
LEVEL 1




LEVEL 2




LEVEL 3



هر عدد صحیح $p$-ادیک با دنبال کردن یک مسیر نامتناهی به بالای برج تعریف می‌شود. یک نگاه از بالا به این برج، تصویری از تمام اعداد صحیح $p$-ادیک می‌دهد.

یکی از بزرگ‌ترین پیشرفت‌های ریاضیات در قرن بیست‌ویکم یک شیء است که 'فضای کامل‌شده'[2] نامیده می شود و این چشم‌انداز را مجسم می‌کند. این شیء توسط پیتر شولتزه[3] از دانشگاه بُن[4] - کسی که در سال ۲۰۱۸ برای بخشی از این کار برندهٔ مدال فیلدز شد - گسترش یافته است. این فقط یک مثال است از اینکه چگونه ریاضیدان‌ها از این برج‌های لایه‌ای استفاده می‌کنند.

دیوید ساویت[5] از دانشگاه جانز هاپکینز[6] می‌گوید: «به‌جای در نظر گرفتن لایه‌های تکی از این برج، به یک‌باره تمام برج را نگاه کنید. این یک بینش بنیادین است که در هر جایی از نظریهٔ اعداد جدید، برنامهٔ لانگلندز[7] و هندسهٔ حسابی پدیدار می‌شود.»

## حساب عجیب و غریب

ریاضیدان‌ها اعداد $p$-ادیک را براساس تعداد دفعات ظاهر شدن هر توان از $p$ در بسط عدد 'در مبنای $p$' می‌نویسند. مثلاً ۱۱ را این‌گونه در ۳-ادیک‌ها می‌نویسید:

$$11 = 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0$$

$$11 \longrightarrow 102$$

11 is expressed as 102 in the 3-adics.

اندازهٔ یک عدد $p$-ادیک با میزان تکرار $p$ در تجزیه به عوامل اولش مشخص می‌شود. اعداد با تکرار بیشتر کوچک‌ترند. مثلاً در ۳-ادیک‌ها ۴۸۶ 'کوچک' است، زیرا در تجزیه به عوامل اولش تعداد زیادی ۳ دارد (۴۸۶ = ۲ × ۳ × ۳ × ۳ × ۳ × ۳).

راه دیگر برای بررسی اندازه، فکر کردن به این است که کدام عدد به صفر نزدیک‌تر است. در اعداد $p$-ادیک، وقتی اعداد صحیح در یک کلاس در طبقات بالاتری از برج باشند، به هم نزدیک‌ترند. اینکه اعداد ۴۸۶ و صفر تا طبقهٔ پنجم در یک کلاس قرار می‌گیرند درحالی‌که صفر و ۶ فقط در طبقهٔ اول در یک کلاس هستند؛ نشان می‌دهد که ۴۸۶ به صفر نزدیک‌تر است تا ۶ (و بنابراین ۴۸۶ از ۶ کوچک‌تر است).

برج‌های $p$-ادیک، با گسترش برج در زیر زمین کسرها را در خود جا می‌دهند. اعداد با توان‌های بزرگ $p$ در صورت کسر، کوچک و اعداد با توان‌های بزرگ‌تر p در مخرج کسر، بزرگ هستند.

حساب، روی متفاوت دیگری هم دارد. به‌عنوان مثال جمع ۹۷۲ = ۴۸۶ + ۴۸۶ را در نظر بگیرید. در اعداد حقیقی، ۹۷۲ خیلی بزرگ‌تر از ۴۸۶ است. اما در ۳-ادیک‌ها، ۹۷۲ هم‌اندازه با ۴۸۶ است، زیرا هر دو مجموع (۹۷۲) و جمعوند (۴۸۶) تعداد یکسانی ۳ در تجزیه‌شان دارند.

$p$-ادیک‌ها شکل متفاوتی از خط اعداد حقیقی را اتخاذ می‌کنند. آن‌ها از نامتناهی کلاس تودرتو در 'نوک' برج $p$-ادیک یک فراکتال می‌سازند. ولی این فراکتال شکاف‌های خودش را هم دارد. ریاضیدان‌ها این شکاف‌ها را با تشکیل یک 'کامل‌سازی' از اعداد گویای $p$-ادیک پر می‌کنند؛ روندی مشابه افزودن مقادیر گنگ به خط اعداد. حداقل قوانین زیربنایی $p$-ادیک‌ها مشابه اعداد حقیقی است.

جسیکا فینتزن[8] از دانشگاه کمبریج[9] و دانشگاه دوک[10] می‌گوید: «هر دوی آن‌ها کامل‌سازی هستند، پس در واقع اشتراکات زیادی دارند.»

## یک خانوادهٔ بزرگ

خانوادهٔ نامتناهی دستگاه‌های اعداد $p$-ادیک، ریاضیدان‌ها را به گسترهٔ وسیعی از چینش‌ها، برای وارسی کردن مسائل دربارهٔ اعداد گویا مجهز می‌سازد.

به‌عنوان مثال، ریاضیدان‌ها دوست دارند بدانند که چه موقع چندجمله‌ای‌هایی مانند $۳x^۳ + ۴y^۳ + ۵z^۳ = ۰$ جواب‌های گویا دارند. قاعدتاً این یک مسئلهٔ دشوار است. اما یافتن جواب‌های $p$-ادیک نسبتاً ساده است.
بیانکا ویرای[۱۱] از دانشگاه واشنگتن[۱۲] می‌گوید: «همه چیز می‌خواهد نسبت به $p$-ادیک‌ها خوش‌رفتار باشد. آن‌ها می‌خواهند جواب داشته باشند.»
یک ابزاری که ریاضیدان‌ها برای حل این معادله استفاده می‌کنند، اصل موضعی - سراسری[۱۳] یا اصل هاسه[۱۴] است که به دههٔ ۱۹۲۰ برمی‌گردد. این اصل بیان می‌دارد که اگر یک چندجمله‌ای در اعداد حقیقی و تمام اعداد $p$-ادیک‌ها جواب داشته باشد؛ آنگاه این چندجمله‌ای در اعداد گویا نیز جواب دارد. اصل موضعی - سراسری برای بعضی از انواع چندجمله‌ای‌ها صادق است نه برای همه.
اساس پشت اصل موضعی - سراسری عجیب و غریب به نظر می‌رسد: ریاضیدان‌ها برای اثبات وجود جواب در اعداد گویا، در بی‌شمار دستگاه اعداد از جمله اعداد حقیقی و تمام $p$-ادیک‌ها به‌دنبال جواب می‌گردند.
نیاز به این‌گونه کار کردن، وسعت مشکلات ایجادشده توسط شکاف‌های اعداد گویا را برجسته می‌کند: شما برای دور زدن آن‌ها به عبور از جهان نیاز دارید. در عین حال، این نشان می‌دهد که در کیهانی منظم از بی‌نهایت دستگاه اعداد، این نیز می‌تواند عجیب باشد که خودمان را تنها به یک دستگاه محدود کنیم که اتفاقاً به خانه نزدیک‌ترین است.
ویرای اذعان داشته: «همهٔ ما روی زمین هستیم و با اعداد حقیقی کار می‌کنیم، اما اگر جای دیگری رفته بودید، می‌توانستید با $p$-ادیک‌ها کار کنید. این اعداد حقیقی هستند که انزواطلب و جدایی‌خواه شده‌اند.»

**مرجع:**

https://www.quantamagazine.org/how-the-towering-p-adic-numbers-work-20201019/

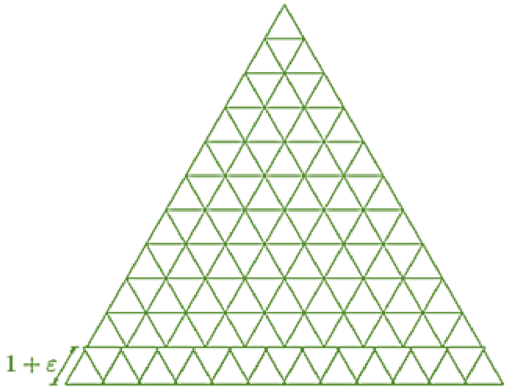
---

[۱] p-adic
[۲] perfectoid space
[۳] Peter Scholze
[۴] University of Bonn
[۵] David Savitt
[۶] John Hopkins University
[۷] Langlands program
[۸] Jessica Fintzen
[۹] University of Cambridge
[۱۰] Duke University
[۱۱] Bianca Viray
[۱۲] University of Washington
[۱۳] local-global principle
[۱۴] Hasse principle

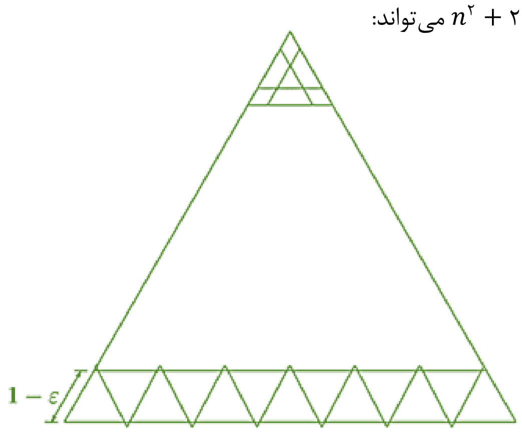
# یکی از کوتاه‌ترین مقاله‌های چاپ‌شده!

## آیا با $n^2 + 1$ مثلث متساوی‌اضلاع واحد، می‌توان یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلعی به طول بزرگ‌تر از $n$، مثلاً $n + \varepsilon$ را پوشاند؟

$n^۲ + ۲$ می‌تواند:




شکل ۱




شکل ۲

این مقاله، کوتاه‌ترین مقاله‌ای است که تاکنون برای یک ژورنال مهم فرستاده شده است. این مقاله تنها دو کلمه و دو شکل دارد که توسط جان کانوی و الکساندر سویفر در سال ۲۰۰۴ نوشته شده است.

ایدهٔ این مقاله در طول یکی از زمان‌های استراحت در دانشگاه پرینستون به دست آمد.

**شیانگ ژی:**

من اثبات را می‌فهمم، اما هدف این مقاله چیست؟ آیا این مقاله فقط آنجاست چون این اثبات به نوعی سرگرم‌کننده است؟ یا کاربرد عمیق‌تری در برخی از شاخه‌های ریاضی دارد؟

**کریس دراست:**

هدف این مقاله، پرسیدن سؤالی است که در عنوان آن مطرح شده است. اگر بنا بود که این مقاله به‌فرم معمول نوشته شود، احتمالاً در آن بیان می‌شد که: «می‌دانیم که می‌توان با $n^۲$ مثلث متساوی‌الاضلاع واحد، یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $n$ را به‌طور کامل کاشی کرد و این حقیقت از قانون مقیاس‌بندی ساده‌ای نتیجه می‌شود: اگر مساحت یک مثلث واحد برابر با $\alpha$ باشد، آنگاه بزرگ کردن مثلث با ضریب $n$، مساحت کل $n^۲\alpha$ را به دست می‌دهد که به $n^۲$ مثلث واحد نیاز دارد. ما دو ساختار ارائه می‌کنیم که $n^۲ + ۲$ مثلث کافی است و یک مسئلهٔ باز باقی می‌ماند: آیا $\varepsilon$ای وجود دارد به‌طوری که بتوان با $n^۲ + ۱$ مثلث، یک مثلث به ضلع $n^۲ + \varepsilon$ را کاشی کرد؟»

**مرجع:**


https://fermatslibrary.com/s/shortest-paper-ever-published-in-a-serious-math-journal-john-conway-alexander-soifer


آیا به‌راحتی متوجه ایدهٔ اثبات شدید؟

نگران نباشید! اگر با ما همراه باشید، می‌توانید در صفحات بعدی این شماره از نشریه، توضیحات تکمیلی این اثبات را مطالعه کنید.

# یادگیری ماشین همکار ریاضی می‌شود

**دو همکاری اخیر بین ریاضیدانان و DeepMind، پتانسیل یادگیری ماشین را برای کمک به محققان در ایجاد حدس‌های جدید ریاضیاتی نشان می‌دهد.**

**مترجم: زهرا ورمزیاری**

دانشجوی کارشناسی آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، پردیس فاطمه‌الزهرا، اهواز

ریاضیدانان اغلب زمانی که به‌دنبال بینشی دربارهٔ یک مسئلهٔ دشوار هستند، با هم کار می‌کنند. این همکاری، نوعی فرایند مشارکتی آزاد است که به نظر می‌رسد به ارتباط منحصربه‌فرد انسانی نیاز دارد. اما در دو نتیجهٔ جدید، نقش همکاری انسان تا حدی با یک ماشین جایگزین شده است.

جوردی ویلیامسون[۱]، ریاضیدان دانشگاه سیدنی و نویسندهٔ یکی از این مقالات گفت: «چیزی که من دربارهٔ ریاضی دوست دارم، جنبه‌های شهودی و خلاقانهٔ آن است. مدل‌های یادگیری ماشین طوری از آن جنبه پشتیبانی می‌کردند که من پیش از این، از کامپیوترها ندیده بودم.»

دو گروه جداگانه از ریاضیدانان در کنار DeepMind، که به توسعهٔ سیستم‌های هوش مصنوعی پیشرفته اختصاص دارد، کار کردند. آندراس جوهاز[۲] و مارک لاکنبی[۳] از دانشگاه آکسفورد به مدل‌های یادگیری ماشین DeepMind آموزش دادند تا الگوهایی را در یک دسته از اجسام هندسی به نام گره جستجو کنند. این مدل‌ها، پیوندهایی را شناسایی کردند که جوهاز و لاکنبی با دقت آن‌ها را شرح دادند تا دو حوزه‌ای از نظریهٔ گره‌ها را به هم متصل کنند که ریاضیدانان مدت‌ها می‌اندیشیدند که باید مرتبط باشند. در کار جداگانه‌ای، ویلیامسون از یادگیری ماشین برای اصلاح یک حدس قدیمی که گراف‌ها و چندجمله‌ای‌ها را به هم متصل می‌کند، استفاده کرد.

سال‌هاست که کامپیوترها به تحقیقات ریاضی کمک می‌کنند، هم به‌عنوان دستیار اثبات که اطمینان می‌دهد مراحل منطقی در یک اثبات واقعاً کار می‌کنند و هم به‌عنوان ابزارهای بی‌رحمی که می‌توانند حجم عظیمی از داده‌ها را برای جست‌وجوی مثال‌های نقض حدس‌ها بررسی کنند.

این کار جدید، نمایانگر شکل متفاوتی از همکاری انسان و ماشین است و نشان می‌دهد که با ترکیب یادگیری ماشین در مرحلهٔ تولید یک تحقیق، ریاضیدانان می‌توانند سرنخ‌هایی را کشف کنند که ممکن است بدون کمک ماشین به‌سختی پیدا شوند.

رادمیلا سازدانوویچ[۴] از دانشگاه ایالت کارولینای شمالی گفت: «شگفت‌انگیزترین چیز در مورد این کار که حقیقتاً پیشرفت بزرگی است، این واقعیت است که همهٔ بخش‌ها کنار هم قرار گرفتند و این افراد به‌عنوان یک تیم کار کردند. این کار به‌راستی یک همکاری بین‌رشته‌ای است.»

هرچند برخی از ناظران، این همکاری را تغییر ناچیزی در روش انجام تحقیقات ریاضی می‌دانند. درحالی‌که کامپیوترها، ریاضیدانان را


جوردی ویلیامسون از دانشگاه سیدنی به شرکت DeepMind کمک کرد تا آن دسته از مسائل ریاضی را که برای یادگیری ماشین مناسب بودند، شناسایی کند.

به‌سمت طیفی از روابط ممکن راهنمایی می‌کردند، این خود ریاضیدانان بودند که باید آن‌هایی را که ارزش کاوش داشت، شناسایی می‌کردند.
ارنست دیویس[۵]، دانشمند کامپیوتر در دانشگاه نیویورک، در ایمیلی نوشت: «تمام کار سخت توسط ریاضیدانان انسانی انجام شد.»

## الگو در داده‌ها

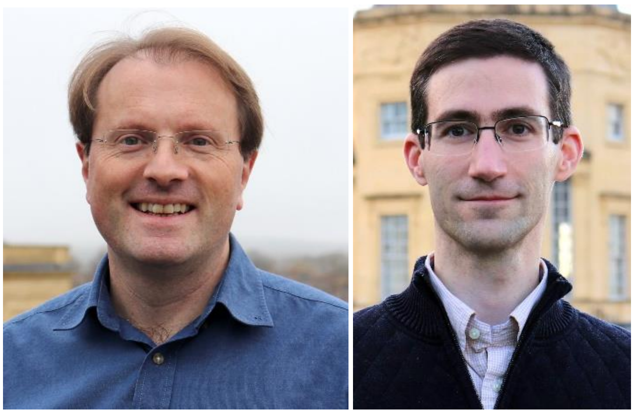
یادگیری ماشین می‌تواند با استفاده از ورودی، خروجی را پیش‌بینی کند: به یک مدل، داده‌های سلامتی را بدهید و تشخیص بیماری را به‌عنوان خروجی بگیرید، تصویری از یک حیوان را به آن نشان بدهید و نام گونه را در پاسخ بگیرید.
این کار، اغلب با استفاده از یک روش یادگیری ماشین به نام یادگیری نظارت‌شده انجام می‌شود که در آن محققین با ارائهٔ مثال‌های زیادی، به کامپیوتر می‌آموزند که پیش‌بینی کند. به‌عنوان مثال، تصور کنید که می‌خواهید به یک مدل آموزش دهید تا تشخیص دهد که آیا یک تصویر حاوی گربه است یا سگ. محققان مدل را با نمونه‌های زیادی از هر حیوان تغذیه می‌کنند. براساس آن داده‌های آموزشی، کامپیوتر یک تابع ریاضی بسیار پیچیده می‌سازد که ماشینی برای پیش‌بینی است. هنگامی که تابع پیش‌بینی ساخته شد، محققان یک تصویر جدید به مدل نشان می‌دهند و کامپیوتر احتمال این را که تصویر یک گربه یا یک سگ باشد، پاسخ خواهد داد.
برای آنکه یادگیری نظارت‌شده به‌عنوان یک ابزار تحقیق، مفید باشد، باید ریاضیدانان سؤالات مناسبی را برای DeepMind پیدا می‌کردند. آن‌ها به مسائلی نیاز داشتند که شامل آن دسته از اجسام ریاضی باشد که داده‌های آموزشی فراوانی برای آن‌ها در دسترس است؛ معیاری که بسیاری از تحقیقات ریاضی آن را برآورده نمی‌کنند. همچنین، آن‌ها باید راهی برای استفاده از توانایی قدرتمند DeepMind در درک ارتباطات پنهان پیدا کنند، درحالی‌که محدودیت‌های قابل توجه آن را به‌عنوان یک همکار بررسی می‌کنند. اغلب، یادگیری ماشین به‌عنوان یک جعبهٔ سیاه عمل می‌کند و از ورودی‌ها، خروجی‌ها را براساس قوانینی که انسان‌ها نمی‌توانند رمزگشایی کنند، تولید می‌کند.
الکس دیویس[۶]، محققی در DeepMind گفت: «[کامپیوتر] می‌توانست چیزهایی واقعاً غیرعادی ببیند، اما در توضیح بسیار مؤثر و روان نیز مشکل داشت.»
ریاضیدانان منتظر نبودند تا DeepMind صرفاً پاسخ‌های صحیح را ارائه دهد. برای پیشرفت واقعی در این زمینه، آن‌ها باید بدانند که چرا این ارتباطات برقرار است، این مرحله‌ای است که کامپیوتر نمی‌تواند تحلیل کند.

## پل زدن ناورداها

در سال ۲۰۱۸، ویلیامسون و دمیس حسابیس[۷]، مدیرعامل و یکی از بنیانگذاران DeepMind، هر دو به‌عنوان اعضای انجمن سلطنتی (یک سازمان بریتانیایی از دانشمندان برجسته)، انتخاب شدند. آن‌ها در طول صرف یک قهوه در مراسم پذیرش، متوجه علاقه‌ای متقابل شدند.
ویلیامسون گفت: «من به اینکه چگونه یادگیری ماشین می‌تواند به ریاضیات کمک کند، کمی فکر کرده بودم و او در مورد آن بسیار فکر کرده بود. ما فقط به نوعی ایده‌های یکدیگر را منعکس کردیم.»
آن‌ها به این نتیجه رسیدند که شاخه‌ای از ریاضیات با نام نظریهٔ گره‌ها، زمینهٔ آزمایشی ایده‌آلی برای همکاری انسان و کامپیوتر است. این شاخه، شامل دسته‌ای از اجسام ریاضی به نام گره است که می‌توانید آن‌ها را به‌عنوان حلقه‌های در هم ریسمان در نظر بگیرید. نظریهٔ گره‌ها با نیازهای یادگیری ماشین مطابقت دارد چراکه داده‌های فراوانی در این زمینه وجود دارد و بسیاری از ویژگی‌های گره‌ها را می‌توان به‌راحتی با استفاده از نرم‌افزارهای موجود محاسبه کرد.
ویلیامسون پیشنهاد کرد که DeepMind با لاکنبی، یک نظریه‌پرداز شناخته‌شدهٔ گره‌ها، تماس بگیرد تا مسئلهٔ مشخصی برای کار روی آن پیدا کند.
جوهاز و لاکنبی نقاط قوت و ضعف یادگیری ماشین را فهمیدند. با این وجود، آن‌ها امیدوار بودند که از یادگیری ماشین برای یافتن ارتباطات جدید بین انواع مختلف ناورداها - ویژگی‌هایی که برای تمیز دادن گره‌ها از یکدیگر استفاده می‌شوند - بهره گیرند.

دو گره، زمانی متفاوت در نظر گرفته می‌شوند که نتوان آن‌ها را (بدون بریدن) طوری باز کرد که شبیه یکدیگر شوند. ناورداها ویژگی‌های ذاتی گره‌ها هستند که در طول فرایند باز کردن تغییر نمی‌کنند، پس اگر دو گره مقادیر متفاوتی برای یک ناوردا داشته باشند، هرگز نمی‌توان آن‌ها را به یکدیگر تبدیل کرد.

انواع مختلفی از ناورداهای گره وجود دارد که با نحوهٔ توصیف گره مشخص می‌شود. برخی بیشتر هندسی، برخی دیگر جبری و برخی ترکیبیاتی هستند. با این حال، ریاضیدانان توانسته‌اند حقایق کمی را در مورد روابط بین ناورداها در زمینه‌های مختلف اثبات کنند. آن‌ها معمولاً نمی‌دانند که ناورداهای مختلف، واقعاً یک ویژگی گره را از منظرهای متعدد اندازه‌گیری می‌کنند یا خیر.


آندراس جوهاز و مارک لاکنبی از دانشگاه آکسفورد، مجموعه‌ای از سرنخ‌های تولیدشده توسط یادگیری ماشین را به‌منظور شناسایی فرمولی برای ترجمهٔ ناورداهای مختلف گره‌ها جمع‌آوری کردند.

جوهاز و لاکنبی متوجه شدند که فرصتی برای یادگیری ماشین وجود دارد تا ارتباط بین رسته‌های مختلف ناورداها را شناسایی کند. آن‌ها از این ارتباط می‌توانند بینش عمیق‌تری نسبت به ماهیت ناورداهای گره به دست آورند.

## تأیید امضا

محققان در DeepMind برای پیگیری سؤال جوهاز و لاکنبی، یک مجموعه داده با بیش از دو میلیون گره ایجاد کردند. آن‌ها برای هر گره، ناورداهای متفاوتی را محاسبه کردند، سپس از یادگیری ماشین برای جستجوی الگوهایی استفاده کردند که ناورداها را به هم ربط می‌دهد. کامپیوتر بسیاری از این الگوها را پیدا کرد که بیشتر آن‌ها برای ریاضیدانان جالب نبودند.

لاکنبی گفت: «ما الگوهای کمی را مشاهده کردیم که شناخته‌شده یا نادرست بودند. به‌عنوان یک ریاضیدان، بسیاری از چیزهایی را که یادگیری ماشین برای ما می‌فرستاد، حذف می‌کردیم.»

برخلاف جوهاز و لاکنبی، سیستم یادگیری ماشین نظریهٔ اصولی ریاضی را درک نمی‌کند. داده‌های ورودی از ناورداهای گره محاسبه شده است، اما کامپیوتر فقط فهرستی از اعداد را می‌بیند.

دیویس گفت: «تا جایی که به سیستم یادگیری ماشین مربوط می‌شود، این اعداد می‌توانند رکوردهای فروش انواع مختلف غذاها در مک‌دونالد باشند.»

در نهایت این دو ریاضیدان به آموزش کامپیوتر برای تولید یک ناوردای جبری مهم به نام 'امضای گره' پرداختند که فقط براساس اطلاعات مربوط به ناورداهای هندسی گره است.

پس از اینکه جوهاز و لاکنبی مسئله را شناسایی کردند، محققان در DeepMind شروع به ساخت الگوریتم یادگیری ماشین کردند. آن‌ها به کامپیوتر آموزش دادند تا ۳۰ ناوردای هندسی یک گره را به‌عنوان ورودی بگیرد و امضای گره را به‌عنوان خروجی بدهد. الگوریتم به‌خوبی کار کرد و پس از چند هفته کار، DeepMind توانست امضای اکثر گره‌ها را به‌دقت پیش‌بینی کند.

در مرحلهٔ بعد، محققان باید درمی‌یافتند که مدل چگونه این پیش‌بینی‌ها را انجام می‌دهد. برای انجام این کار، تیم DeepMind به روشی به نام 'تحلیل برجستگی' روی آورد که می‌تواند تشخیص دهد کدام‌یک از ورودی‌های متعدد، مسئول تولید خروجی هستند. آن‌ها مقدار ورودی‌ها را یکی‌یکی تغییر دادند و بررسی کردند که کدام تغییر بیشترین تأثیر را بر خروجی دارد.

اگر الگوریتمی برای پیش‌بینی وجود گربه در یک تصویر طراحی شده باشد، محققانی که تحلیل برجستگی را انجام می‌دهند بخش‌های کوچکی از تصویر را محو می‌کنند و سپس بررسی می‌کنند که آیا کامپیوتر هنوز گربه را می‌شناسد یا خیر. به‌عنوان مثال، آن‌ها ممکن است متوجه شوند که پیکسل‌های گوشهٔ تصویر نسبت به پیکسل‌هایی که گوش گربه را تشکیل می‌دهند، اهمیت کمتری دارند.

هنگامی که محققان، تحلیل برجستگی را روی داده‌ها اعمال کردند، متوجه شدند که سه مورد از ۳۰ ناوردای هندسی برای چگونگی پیش‌بینی مدل بسیار مهم است. هر سه ناوردا، ویژگی‌های کاسپ[۸] را اندازه‌گیری می‌کنند، که یک لولهٔ توخالی است که گره را می‌پوشاند، مانند پوشش لاستیکی اطراف یک کابل.

براساس این اطلاعات، جوهاز و لاکنبی فرمولی ساختند که امضای یک گره را به آن سه ناوردای هندسی مرتبط می‌کرد. این فرمول از یک ناوردای رایج دیگر نیز استفاده می‌کند؛ حجم کره‌ای که گره روی آن قرار می‌گیرد. وقتی آن‌ها این فرمول را روی گره‌های خاص آزمایش کردند، به نظر رسید که کار می‌کند، اما این برای بیان یک قضیهٔ جدید ریاضی کافی نبود. ریاضیدانان به‌دنبال یک حکم دقیق بودند که بتوانند ثابت کنند همواره معتبر است و این سخت‌تر بود.

شهود جوهاز و لاکنبی که در طول سال‌ها مطالعهٔ مسائل مشابه ایجاد شده بود، به آن‌ها می‌گفت که این فرمول هنوز چیزی کم دارد. آن‌ها متوجه شدند که باید یک ناوردای هندسی دیگر را معرفی کنند، چیزی به نام شعاع یک‌به‌یکی[9] که طول خم‌های خاصی متناظر با گره را اندازه می‌گیرد. این مرحله‌ای بود که از شهود آموزش‌دیدهٔ ریاضیدانان استفاده کرد، اما توسط بینش خاصی امکان‌پذیر شد که آن‌ها می‌توانستند از ارتباطات ویرایش‌نشدهٔ شناسایی‌شده توسط مدل DeepMind به دست آورند.

آدام زولت واگنر[10] از دانشگاه تل‌آویو گفت: «خوب است که [مدل‌های یادگیری ماشین] نقاط قوت و ضعف کاملاً متفاوتی نسبت به انسان‌ها دارند.»

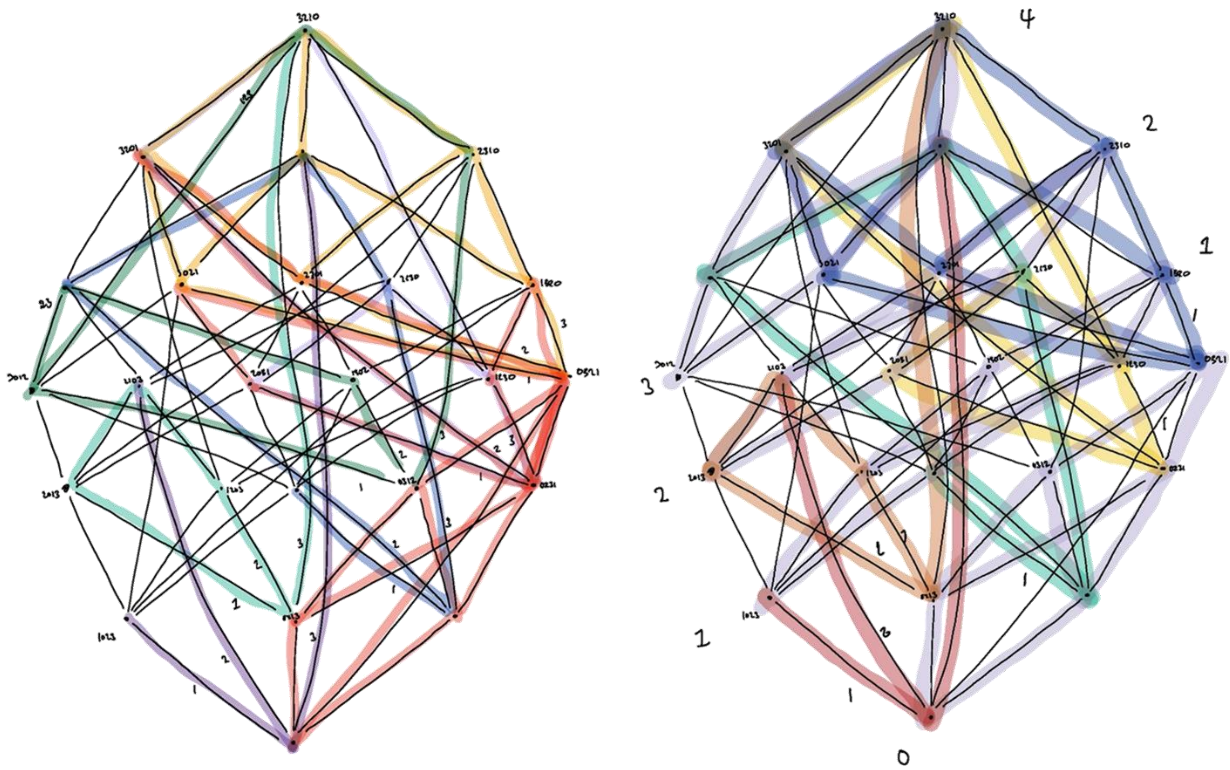
اصلاح با موفقیت انجام شد. جوهاز و لاکنبی با ترکیب اطلاعات در مورد شعاع یک‌به‌یکی و سه ناوردای هندسی که DeepMind انتخاب کرده بود، فرمولی برای محاسبهٔ امضای یک گره ایجاد کردند. نتیجهٔ نهایی روحیهٔ یک همکاری واقعی را در خود داشت.

لاکنبی گفت: «این قطعاً یک فرایند تکرارشونده بود که هم متخصصان یادگیری ماشین از DeepMind و هم ما را درگیر می‌کرد.»

## تبدیل گراف‌ها به چندجمله‌ای

براساس میزان پیشرفت پروژهٔ نظریهٔ گره‌ها، در اوایل سال ۲۰۲۰، DeepMind به ویلیامسون بازگشت تا ببیند که او می‌خواهد فرایند مشابهی را در زمینهٔ کاری خود، یعنی نظریهٔ نمایش، آزمایش کند یا خیر. نظریهٔ نمایش شاخه‌ای از ریاضی است که به‌دنبال راه‌هایی برای ترکیب عناصر بنیادی ریاضیات، مانند تقارن، برای ساخت اشیای پیچیده‌تر است.

در این زمینه، چندجمله‌ای‌های کژدان - لوستیگ[11] اهمیت ویژه‌ای دارند. این چندجمله‌ای‌ها براساس روش‌هایی برای بازآرایی اشیا هستند که جایگشت نام دارد. هر چندجمله‌ای کژدان - لوستیگ از یک جفت جایگشت ساخته شده است و اطلاعات مربوط به رابطهٔ آن‌ها را رمزگذاری می‌کند. این چندجمله‌ای‌ها بسیار مرموز هستند و اغلب محاسبهٔ ضرایب آن‌ها دشوار است.



ریاضیدانان و DeepMind از یادگیری ماشین برای جستجوی فرمولی برای تبدیل گراف‌های بروهات به چندجمله‌ای استفاده کردند.

با توجه به این موضوع، ریاضیدانان سعی می‌کنند چندجمله‌ای‌های کژدان - لوستیگ را برحسب اشیایی به نام گراف‌های بروهات[۱۲] که کار با آن‌ها آسان‌تر است، درک کنند. هر رأس در گراف بروهات، نشان‌دهندهٔ جایگشت تعداد معینی از اشیا است و یال‌ها، رئوسی را به هم متصل می‌کنند که جایگشت‌های آن‌ها با جابه‌جایی فقط دو عنصر متفاوت به دست آمده است.

در دههٔ ۱۹۸۰، جورج لوستیگ و متیو دایر[۱۳] به‌طور مستقل پیش‌بینی کردند که باید بین گراف بروهات و چندجمله‌ای کژدان - لوستیگ رابطه‌ای وجود داشته باشد. این رابطه مفید خواهد بود، زیرا چندجمله‌ای بنیادی‌تر است، درحالی‌که محاسبهٔ گراف ساده‌تر است.

درست مانند مسئلهٔ پیش‌بینی یک ناوردای گره با استفاده از ناورداهای دیگر، این مسئله به‌خوبی با توانایی‌های DeepMind سازگار بود. تیم DeepMind با آموزش این مدل توسط تقریباً ۲۰۰۰۰ دوتایی گراف بروهات و چندجمله‌ای کژدان - لوستیگ شروع به کار کرد. این مدل توانست بارها چندجمله‌ای درست کژدان - لوستیگ را از روی گراف بروهات پیش‌بینی کند، اما ویلیامسون برای نوشتن قاعده‌ای جهت رسیدن از یکی به دیگری، نیاز داشت که بداند کامپیوتر چگونه پیش‌بینی‌های خود را انجام می‌دهد.

## یک فرمول، اگر بتوانید آن را ثابت کنید

بار دیگر در اینجا، محققان DeepMind به تکنیک‌های تحلیل برجستگی روی آوردند. گراف‌های بروهات بسیار بزرگ هستند، اما پیش‌بینی‌های کامپیوتر بیشتر براساس تعداد کمی از یال‌ها بود. یال‌هایی که جابه‌جایی اعداد خیلی دور (مانند ۱ و ۹) را نشان می‌دادند، برای پیش‌بینی‌ها مهم‌تر از یال‌های بین جایگشت‌هایی بودند که در آن‌ها اعداد نزدیک به هم (مانند ۴ و ۵) جابه‌جا شده‌اند. این سرنخی بود که ویلیامسون باید آن را توسعه می‌داد.

ویلیامسون گفت: «الکس [دیویس] به من می‌گوید این یال‌ها، به هر دلیلی، بسیار مهم‌تر از دیگر یال‌ها هستند. توپ به زمین من برگشته بود و من چند ماه به آن‌ها خیره بودم.»

در نهایت ویلیامسون ده فرمول یا بیشتر برای تبدیل گراف‌های بروهات به چندجمله‌ای های کژدان - لوستیگ ارائه داد. تیم DeepMind آن‌ها را با میلیون‌ها مثال از گراف‌های بروهات تطبیق داد. برای چندین فرمول اولیهٔ ویلیامسون، تیم DeepMind به‌سرعت مثال‌هایی را یافت که کار نمی‌کردند؛ جاهایی که قاعده‌ها شکست خوردند. اما بالاخره ویلیامسون فرمولی پیدا کرد که به نظر می‌رسد احتمالاً باقی بماند. این فرمول شامل شکستن گراف بروهات به قطعاتی شبیه به مکعب و استفاده از آن اطلاعات برای محاسبهٔ چندجمله‌ای متناظر است. محققان DeepMind از آن زمان تا به حال، این فرمول را بر روی میلیون‌ها مثال تأیید کرده‌اند. اکنون این وظیفهٔ ویلیامسون و دیگر ریاضیدانان است که ثابت کنند این قاعده همواره کار می‌کند.

استفاده از کامپیوتر برای پیدا کردن مثال‌های نقض، روشی استاندارد در تحقیقات ریاضی است، اما همکاری‌های اخیر باعث شده تا کامپیوترها در مسیری جدید نیز مفید باشند. برای مسائل با حجم بالای داده، یادگیری ماشین می‌تواند ریاضیدانان را به‌سمت مسیرهای بدیع راهنمایی کند، بیشتر شبیه به یک همکار که پیشنهادی تصادفی ارائه می‌دهد.


**مرجع:**

https://www.quantamagazine.org/deepmind-machine-learning-becomes-a-mathematical-collaborator-20220215/


---

۱ Geordie Williamson
۲ András Juhász
۳ Marc Lackenby
۴ Radmila Sazdanovic
۵ Ernest Davis
۶ Alex Davies
۷ Demis Hassabis
۸ cusp
۹ injectivity radius
۱۰ Adam Zsolt Wagner
۱۱ Kazhdan-Lusztig polynomials
۱۲ Bruhat graphs
۱۳ Matthew Dyer

# تحلیل کوتاه‌ترین مقالهٔ چاپ‌شده

در این بخش به تحلیل اثبات کانوی و سویفر می‌پردازیم. این صفحه به تحلیل شکل ۱ اختصاص دارد.

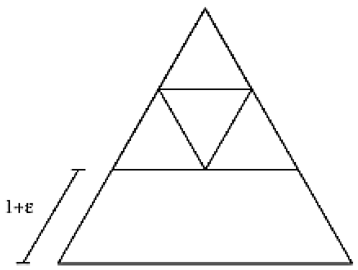
ابتدا اجازه دهید کمترین تعداد مثلث‌های متساوی‌الاضلاع واحدی که برای پوشاندن مثلث بزرگ نیاز داریم، مشخص کنیم:

$$A_{\text{مثلث کوچک}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

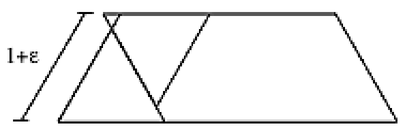
$$A_{\text{مثلث بزرگ}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(n+\varepsilon)^{۲} = A_{\text{مثلث کوچک}}(n^{۲} + ۲n\varepsilon + \varepsilon^{۲}) < A_{\text{مثلث کوچک}}(n^{۲}+۱)$$

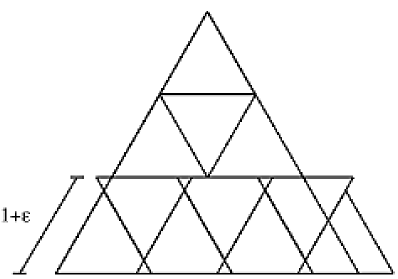
نتیجه می‌گیریم که به حداقل $n^{۲}+۱$ مثلث واحد نیاز داریم (با فرض اینکه $\varepsilon$ به قدر کافی کوچک است).

در ادامه، می‌توانید روشی را ببینید که جان کانوی پیدا کرد تا نشان دهد که به $n^{۲}+۲$ مثلث متساوی‌الاضلاع واحد برای پوشاندن مثلث بزرگ نیاز است. برای درک اثبات او، اجازه دهید حالت ساده‌تر $n=۳$ را تحلیل کنیم. در این حالت، می‌توانید مثلث‌های واحد را از بالا بچینید و در نهایت به چیزی شبیه به شکل زیر خواهید رسید:




می‌بینیم که هنوز باید ذوزنقه‌ای را بپوشانیم که طول اضلاع کناری آن $۱+\varepsilon$ است. برای پوشاندن این ذوزنقه، دو مثلث واحد را به‌طور غیرهم‌تراز روی هم قرار می‌دهیم تا بتوانیم فضای اضافی ایجادشده توسط $\varepsilon$ را بپوشانیم و سپس این کار را تکرار می‌کنیم تا کل ذوزنقه پوشانده شود. همان‌طور که در شکل پایین مشاهده می‌کنید، این حقیقت که اضلاع ذوزنقه به اندازهٔ $\varepsilon$ بزرگ شده است، ما را مجبور می‌کند که از ۲ مثلث اضافی برای پوشاندن آن استفاده کنیم:

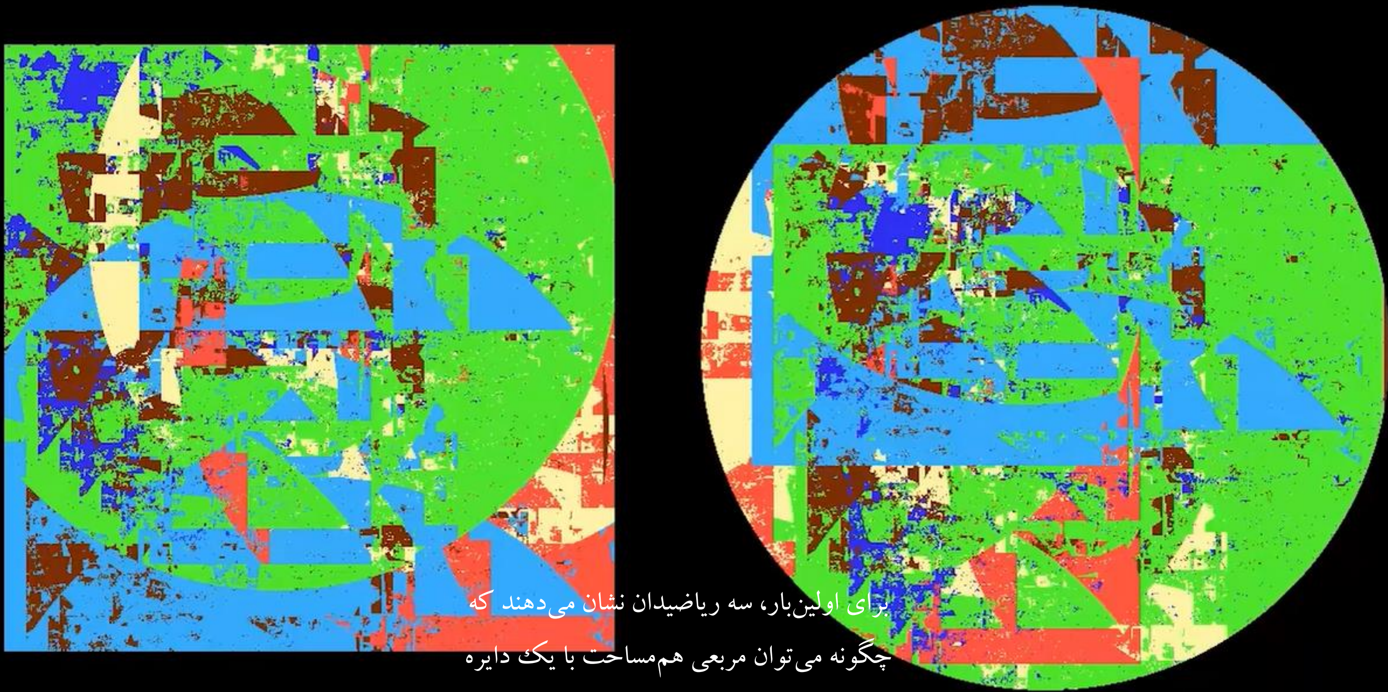



اگر $\varepsilon = ۰$، آنگاه همان‌طور که در ابتدا اشاره کردیم، دقیقاً به $۳^{۲}$ مثلث واحد برای پوشاندن مثلث بزرگ نیاز داریم و زمانی که $\varepsilon \neq ۰$، به ۲ مثلث اضافی نیاز داریم: $۳^{۲}+۲$

سخت نیست ببینید که این ساختار را می‌توان برای هر اندازهٔ دلخواهی تعمیم داد: $n+\varepsilon$ و بنابراین تعداد کل $n^{۲}+۲$ مثلث واحد.

# یک مسئلهٔ هندسهٔ باستانی، تسلیم تکنیک‌های جدید ریاضی می‌شود



برای اولین‌بار، سه ریاضیدان نشان می‌دهند که چگونه می‌توان مربعی هم‌مساحت با یک دایره توسط برش آن‌ها به قطعاتی تعویض‌پذیر که قابل تجسم هستند، ساخت.


**مترجم: زهرا شیخ‌علی‌ملیانی**

دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهید بهشتی


در حدود ۴۵۰ سال قبل از میلاد، آناکساگوراس[۱] از کلازومنه[۲] فرصتی برای فکر کردن داشت. این ریاضیدان یونانی به‌دلیل این ادعا که خورشید خدا نیست، بلکه صخره‌ای به بزرگی شبه‌جزیره پلوپونیز[۳] است، در زندان بود. فیلسوفی که معتقد بود «خرد بر جهان حکومت می‌کند»، از حبس خود برای دست و پنجه نرم کردن با یک مسئلهٔ ریاضی معروف به نام تربیع دایره استفاده کرد: آیا با استفاده از خط‌کش و پرگار، می‌توانید مربعی هم‌مساحت با یک دایرهٔ معین بسازید؟
با کمال تعجب، ریاضیدانان هنوز روی این سؤال کار می‌کنند و در حال پیشرفت هستند. مقاله‌ای که مدتی پیش به‌صورت آنلاین توسط آندراس ماته[۴] و اولگ پیخورکو[۵] از دانشگاه واروبک و جاناتان نوئل[۶] از دانشگاه ویکتوریا منتشر شد، آخرین مقاله‌ای است که به این روایت باستانی وصل شده است. نویسندگان نشان می‌دهند که چگونه می‌توان یک دایره را با بریدن به قطعاتی که قابل تجسم و احتمالاً ترسیم هستند، مربع کرد. این نتیجه‌ای است که براساس یک تاریخ غنی ساخته شده است.

در سال ۱۸۸۲، سؤال دقیق مطرح‌شده توسط آناکساگوراس پاسخ داده شد، زمانی که ریاضیدان آلمانی فردیناند فون لیندمان[۷] ثابت کرد که تربیع دایره با ابزارهای کلاسیک غیرممکن است. او نشان داد که $\pi$ – مساحت دایره‌ای با شعاع ۱ – نوع خاصی از عدد است که در دستهٔ اعداد متعالی قرار می‌گیرد (دسته‌ای که شامل عدد اویلر $e$ نیز می‌شود). از آنجایی که یک نتیجهٔ پیشین نشان داده بود که استفاده از خط‌کش و پرگار برای ساختن طولی برابر با یک عدد متعالی غیرممکن است، تربیع دایره به این صورت نیز غیرممکن است.

این ممکن بود پایان داستان باشد، اما در سال ۱۹۲۵ آلفرد تارسکی[۸] با پیچاندن قوانین، مسئله را زنده کرد. او پرسید که آیا می‌توان این کار را با بریدن یک دایره به تعدادی محدود از قطعات که می‌تواند در یک صفحه حرکت داده شود و دوباره در مربعی با مساحت مساوی جمع شود، انجام داد؟ – رویکردی که به‌عنوان هم‌تجزیه‌پذیری[۹] شناخته می‌شود.

به عبارت دیگر، دو جسم هم‌تجزیه‌پذیرند اگر بتوان آن‌ها را به قطعاتی با اندازه و شکل یکسان تقسیم کرد، یا به‌طور دقیق‌تر، پیخورکو گفت: «اگر بتوانید آن‌ها را به تعداد زیادی قسمت تقسیم کنید، به‌طوری که قسمت‌های متناظر با یکدیگر هم‌نهشت باشند.»

یک مقاله در سال ۱۹۶۴ اولین مقاله‌ای بود که پیشرفت قابل توجهی در مورد نسخهٔ تارسکی از این مسئله داشت. نویسندگان نشان دادند که این هم‌تجزیه‌پذیری نمی‌تواند با قیچی انجام شود. این کار، اگر امکان‌پذیر باشد، به قطعات فراکتال پیچیده‌تر، پر از سوراخ و لبه‌های پیچیدهٔ ناهموار نیاز دارد.


ریاضیدان یونانی، آناکساگوراس از کلازومنه که در اینجا به‌عنوان یک محقق قرون وسطایی در کرونیکل نورنبرگ نشان داده شده است، اولین کسی بود که در مورد ’تربیع دایره‘ نوشت؛ مسئله‌ای به‌طور فریبنده دشوار.

این‌ها چیزهایی است که تا سال ۱۹۹۰ بود، تا زمانی که میکلوش لاکزکوویچ [۱۰] به سؤال تارسکی این‌گونه پاسخ مثبت داد: یک دایره می‌تواند به‌شکل مربع دوباره ساخته شود.

برای تجسم دستاورد لاکزکوویچ، یک دایره و مربع را در کنار هم در یک صفحه تصور کنید. او نشان داد که اگر دایره به حداکثر $10^{50}$ قطعه تقسیم شود، همهٔ آن‌ها پیچیده و با اشکال غیرمعمول باشند، آن قطعات را می‌توان حرکت داد - بدون اینکه حتی چرخانده شوند - تا زمانی که به‌طور کامل مربع را پر کنند.

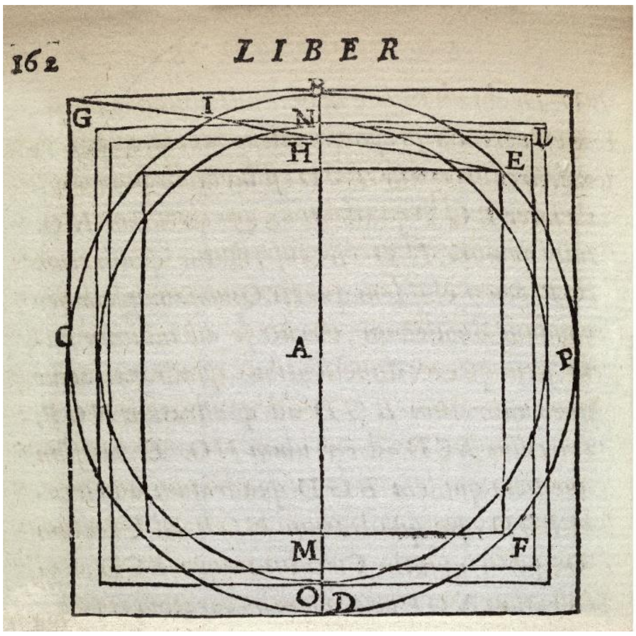
اما برای رسیدن به این نتیجه، لاکزکوویچ با اشکال کار نکرد. در عوض، او مسئلهٔ هندسه را به یک مسئلهٔ نظریه گراف تبدیل کرد. او یک گراف بزرگ با دو مجموعهٔ مجزا از رئوس در نظر گرفت - یکی متناظر با یک دایره، دیگری با یک مربع - و سپس تناظرهای یک‌به‌یک را بین رئوس یک مجموعه و رأس‌های دیگری برقرار کرد.

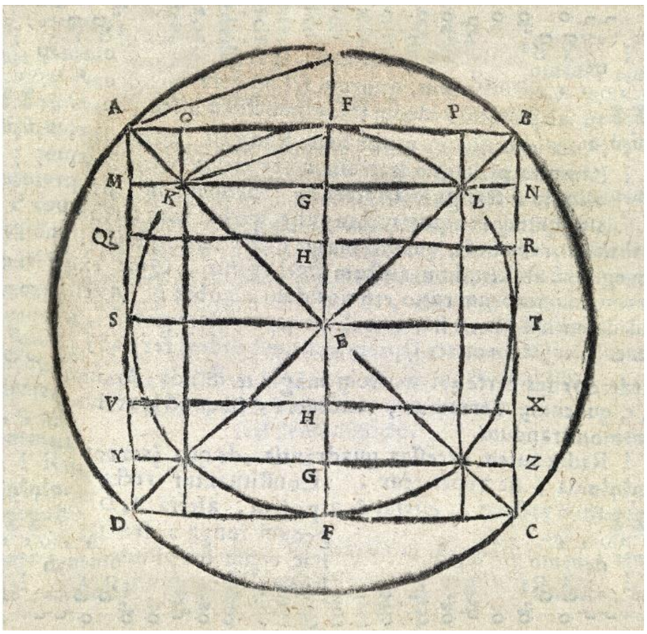
استان واگن[۱۱]، یک ریاضیدان در دانشگاه مکالستر[۱۲]، نتایج را ’حیرت‌آور‘ توصیف کرد. لازکوویچ نشان داد که چگونه می‌توان یک فضای دایره‌ای در نظر گرفت و آن را صاف کرد.

با این حال، یک نکته وجود داشت. برهان لاکزکوویچ یک اثبات وجودی است، چیزی که ریاضیدانان آن را ’غیرساختنی[۱۳]‘ می‌نامند. او ثابت کرد که می‌توان آن را انجام داد، اما نمی‌توانست بگوید چگونه قطعات را بسازد و به هیچ‌وجه نمی‌توانست آن‌ها را توصیف کند. بدتر از آن، قطعات ’اندازه‌ناپذیر‘ هستند، به این معنی که تعیین مساحت آن‌ها غیرممکن است.

گام بزرگ بعدی چند دهه بعد در مقاله‌ای برداشته شد که در ژانویهٔ ۲۰۱۶ توسط لوکاس گرابوفسکی[۱۴]، ماته و پیخورکو منتشر شد. اثبات آن‌ها، برخلاف لاکزکوویچ، تقریباً کاملاً ساختنی است، به این معنی که قطعات عمدتاً خوش‌تعریف‌اند. اما باز هم یک نکته وجود داشت: آن قطعات خوش‌تعریف از دایره، کل مربع را پر نمی‌کنند. هنوز قطعات اضافه‌تری برای پوشاندن قسمت کوچکی از مربع لازم است. این بخش آن‌قدر کوچک است که مساحتی ندارد و ریاضیدانان از آن با نام ’مجموعه‌ای از اندازهٔ صفر‘ یاد می‌کنند.

اندرو مارکس[۱۵]، ریاضیدانی از دانشگاه کالیفرنیا در لس آنجلس، گفت: «تقریباً تمام فضا مورد توجه قرار گرفته است. شما حتی نمی‌توانید قطعات ازدست‌رفته را رسم کنید، چراکه مجموعهٔ غیرقابل مشاهده به نظر می‌رسد.»



پس از قرن‌ها تلاش - این نمودارها مربوط به قرن ۱۶ و ۱۷ است - فردیناند فون لیندمان ثابت کرد که کشیدن مربعی با مساحت مساوی با یک دایرهٔ معین تنها با استفاده از خط‌کش و پرگار غیرممکن است. اما اگر به آن ابزارها ملزم نباشیم، مسئله شکل جدیدی به خود می‌گیرد.

مارکس گفت: «با وجود این قطعات اضافی ضروری، این نتیجه یک گام شگرف رو به جلو بود. آن‌ها راهی برای تربیع دایره پیدا کردند که تقریباً همه‌جا کار می‌کند، همه‌جا به‌جز مجموعه‌ای از اندازهٔ صفر.»

مارکس، همراه با اسپنسر اونگر[۱۶]، که اکنون در دانشگاه تورنتو مشغول به کار است، یک سال بعد پیشرفت بزرگی را انجام دادند و اولین اثبات کاملاً ساختنی تربیع دایره را ارائه کردند - اثباتی که بدون استثنا همه‌جا کار می‌کند. مقالهٔ آن‌ها شرح کاملی از تمام قطعات مورد نیاز برای تربیع دایره ارائه می‌دهد. ماته گفت: «قطعه‌های آن‌ها بهتر است. آن‌ها این مجموعهٔ زشت از اندازهٔ صفر را ندارند.»

با این اوصاف، اثبات آن‌ها حتی شامل قطعات بیشتر است - حدود $۱۰^{۲۰۰}$ - و این قطعات هنوز کاملاً پیچیده هستند. مارکس گفت: «ایراد مقالهٔ ما این است که اگرچه قطعات به صراحت از دیدگاه ریاضی تعریف شده‌اند، تجسم آن‌ها بسیار دشوار است.»

مقداری فضا برای پیشرفت باقی ماند که آن چیزی است که ماته، نوئل و پیخورکو ارائه کردند. قطعات آن‌ها که دوباره به $۱۰^{۲۰۰}$ عدد می‌رسد، شکل ساده‌تری دارند و تجسم آن‌ها برای ریاضیدانان بسیار آسان‌تر است.

مارکس گفت: «جهش بزرگ در اینجا این است که شما نمی‌توانید قطعات من و اسپنسر را به شیوه‌ای که به‌راحتی می‌توانید ببینید بکشید، اما با این قطعات می‌توانید.»

اما این پایان ماجرا نیست. الکساندر ککریس[۱۷]، ریاضیدان مؤسسهٔ فناوری کالیفرنیا، گفت: «هنوز ریاضیات بیشتری برای پایان یافتن این مسئله وجود دارد. این یک پیشرفت تدریجی و مداوم است.»

در حال حاضر، پیخورکو ایده‌هایی برای ساده‌سازی بیشتر قطعات، کاهش تعداد کل آن‌ها و کاهش ناهمواری آن‌ها دارد و مارکز آزمایش‌هایی رایانه‌ای انجام داده که حاکی از آن است - اما اثبات نمی‌کند - که این هم‌تجزیه‌پذیری را می‌توان با ۲۲ قطعه انجام داد. او معتقد است که به احتمال زیاد کمترین تعداد، حتی کمتر از این مقدار است.

او گفت: «به یک نوشیدنی شرط می‌بندم که بتوانید دایره را با کمتر از ۲۰ قطعه مربع کنید. اما ۱۰۰۰ دلار شرط نمی‌بندم.»

**مرجع:**

https://www.quantamagazine.org/an-ancient-geometry-problem-falls-to-new-mathematical-techniques-20220208/

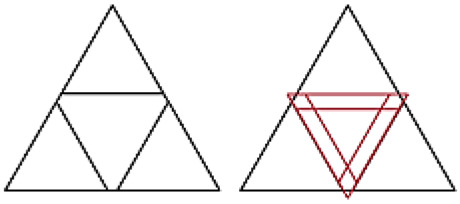
---

۱ Anaxagoras
۲ Clazomenae
۳ Peloponnese
۴ Andras Máthé
۵ Oleg Pikhurko
۶ Jonathan Noel
۷ Ferdinand von Lindemann
۸ Alfred Tarski
۹ equidecomposition
۱۰ Miklós Laczkovich
۱۱ Stan Wagon
۱۲ Macalester College
۱۳ nonconstructive
۱۴ Łukasz Grabowski
۱۵ Andrew Marks
۱۶ Spencer Unger
۱۷ Alexander Kechris

# تحلیل کوتاه‌ترین مقالهٔ چاپ‌شده

در این بخش، ساختاری را مشاهده می‌کنید که سویفر برای اثبات همان نتیجه به دست آورد. برای درک آن، بار دیگر از حالت ساده‌تر استفاده می‌کنیم و سپس نتیجه را تعمیم می‌دهیم.

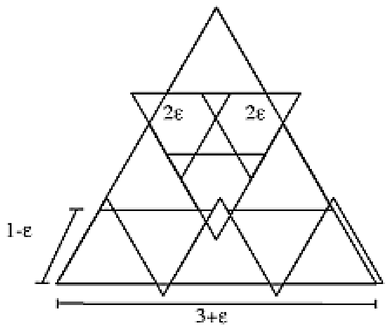
ابتدا اجازه دهید که با مثلثی به ضلع $\varepsilon + ۲$ شروع کنیم. برای پوشاندن این مثلث، از ۳ مثلث واحد استفاده می‌کنیم و آن‌ها را در گوشه‌ها قرار می‌دهیم. همان‌طور که در شکل زیر مشاهده می‌کنید، یک شش‌ضلعی در وسط باقی مانده است. برای پوشاندن این شش‌ضلعی باقی‌مانده، به ۳ مثلث واحد نیاز داریم که به‌صورت زیر قرار گرفته‌اند:



برای $n = ۲$، ساختار سویفر به اندازهٔ ساختار کانوی کارآمد است، چراکه در نهایت از $۲ + ۲^۲$ مثلث واحد برای پوشاندن یک مثلث به ضلع $\varepsilon + ۲$ استفاده کردیم.

حال برای $n = ۳$، دقیقاً همان کاری را که برای $n = ۲$ انجام دادیم، تکرار می‌کنیم. اما فضای میانی $۲\varepsilon$ خواهد بود، درنتیجه یک ذوزنقه باقی می‌ماند که طول اضلاع کناری آن $۱ - \varepsilon$ است.

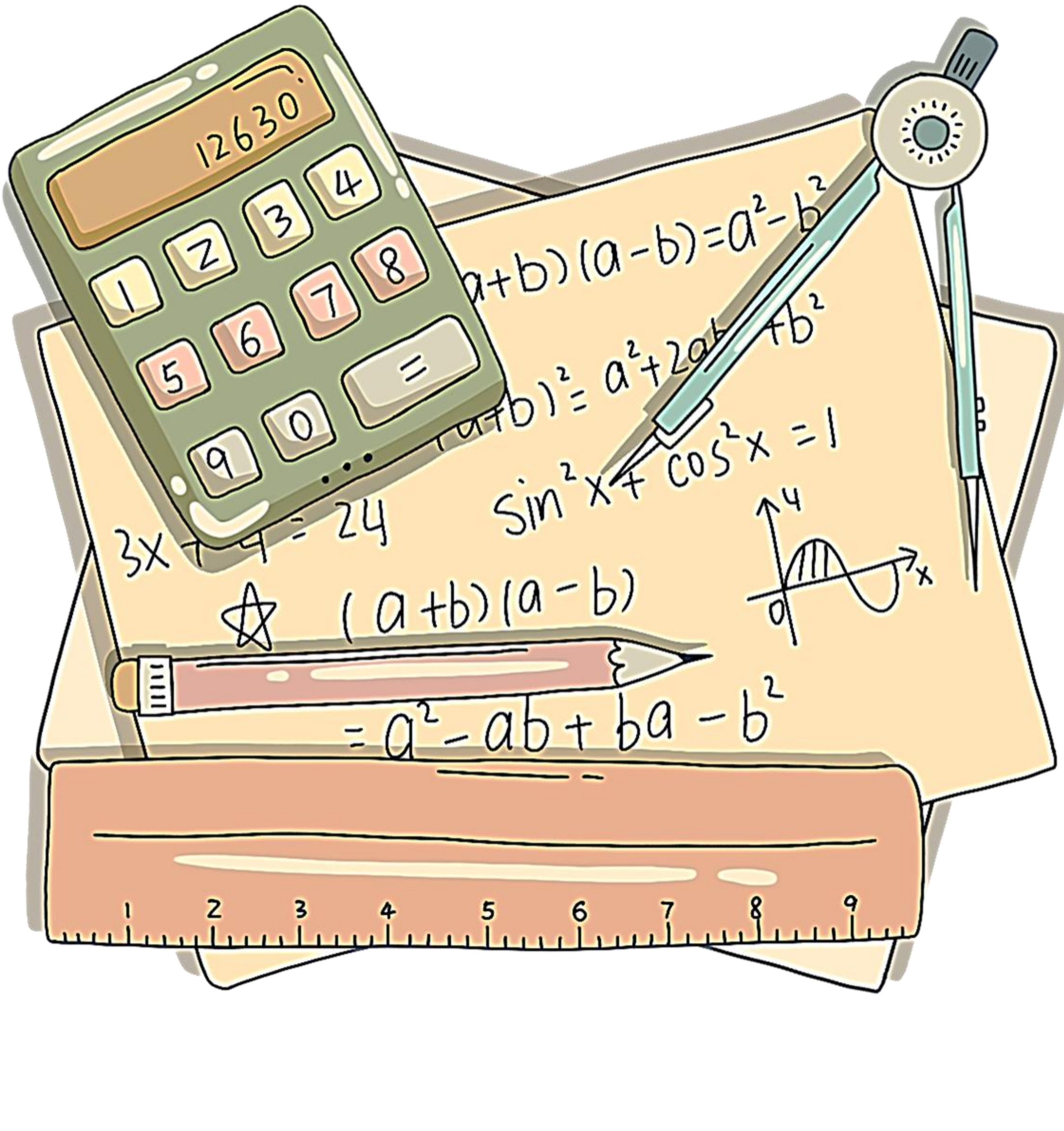
برای پوشاندن این ذوزنقه، از همان روش کانوی استفاده می‌کنیم، اما این بار به هیچ مثلث اضافی برای پوشاندن آن نیاز نداریم. توجه کنید که این امکان‌پذیر است چراکه طول اضلاع کناری $۱ - \varepsilon$ است، در غیر این صورت به مثلث‌های بیشتری برای پوشاندن ذوزنقه نیاز داشتیم، زیرا طول قاعدهٔ آن $\varepsilon + ۳$ است (به همین دلیل $۲\varepsilon$ در وسط باقی گذاشتیم).




تعداد کل مثلث‌های واحد که برای پوشاندن حالت $n = ۳$ استفاده کردیم، دوباره $۲ + ۳^۲$ است که معادل با ساختار کانوی است.

سخت نیست ببینید که این نتیجه را نیز می‌توان برای هر $n$ دلخواه تعمیم داد و تعداد کل مثلث‌های واحد برابر با $۲ + n^۲$ خواهد بود. تنها لازم است که از ساختار ۳مثلثی استفاده کنیم و مطمئن شویم که طول اضلاع کناری ذوزنقه در پایین مثلث برابر با $۱ - \varepsilon$ است (همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌کنید، سویفر تصمیم گرفت که با ساختار ۳مثلثی شروع کند).

# روی تخته سیاه


12630
=a²-b²
sin²x+cos²x =1
(a+b)(a-b)
=a²-ab+ba-b²

# اعداد متعالی کجای ریاضیات روزمره پنهان می‌شوند؟

عدد متعالی $\pi$ به همان اندازه که همه جا حضور دارد آشناست، اما چگونه عدد اویلر $e$ از اعداد معمولی فراتر می‌رود؟


**مترجم: زهرا صمدی**

دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه شهید بهشتی


در زبان روزمره، کلمهٔ 'متعالی'[1] اشاره بر چیزی دارد که از معمولی فراتر باشد؛ مفهومی مخفی و اسرارآمیز با قدرتی مبهم و جادویی. از سوی دیگر در ریاضیات، مفهوم اصطلاح متعالی این دنیایی‌تر است. به‌طور ساده، این کلمه کلاسی با بی‌شمار عدد را توصیف می‌کند که ریشهٔ یک چندجمله‌ای مانند $ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$ نیستند، جایی که ضرایب $a$، $b$، $c$ و غیره همگی گویا هستند و بیشترین توان $x$ می‌تواند هر عدد صحیح مثبتی باشد. همان‌طور که ریاضیدان بزرگ لئونارد اویلر گفته است: «آن‌ها از قدرت روش‌های جبری فراتر می‌روند.»

با این حال، مفهوم متداول کلمهٔ 'متعالی' برای دو عدد غیرجبری مشهور — ثابت‌های جهانی $\pi$ و $e$ — صادق است. این دو عدد حقیقتاً اسرارآمیز و قدرتمند هستند و مقداری جادویی را نمایش می‌دهند. آن‌ها نقشی محوری را در شاخه‌های متعدد ریاضیات بازی می‌کنند و زمانی که انتظارش را ندارید، از ناکجاآباد در حل مسائل ظاهر می‌شوند. در بین این دو مقدار ثابت قدرتمند، عدد $\pi$ برای بسیاری از ما شناخته‌شده‌تر است. همهٔ دانش‌آموزان مقدار تقریبی آن را می‌دانند و در محاسبات از آن استفاده می‌کنند، اما عدد اویلر $e$ یا ...۲.۷۱۸۲۸ برای بسیاری از ما شناخته‌شده نیست. در واقع، $e$ اولین عدد غیرساختنی بود که توسط چارلز هرمیت[2] در ۱۸۷۳، متعالی بودن آن اثبات شد. باید مشخص کنیم که منظور از 'غیرساختنی' چیست چراکه ژوزف لیوویل[3] در ۱۸۵۰، اولین مثال اثبات‌پذیر از اعداد متعالی را ارائه داد، اما این عددی بود که او برای همین هدف ساخته بود و به‌صورت طبیعی در هیچ شاخه‌ای از ریاضیات به وجود نیامده بود. قطعاً این موضوع با $e$ که به‌صورت طبیعی تقریباً در همه‌جای ریاضیات ظاهر می‌شود، تفاوت دارد. بسیاری از ما می‌دانیم که $e$ مبنای لگاریتم طبیعی است و در تئوری بهرهٔ مرکب و رشد و تنزل نمایی راه پیدا کرده است، اما می‌توانیم محاسبات در این زمینه‌ها را بدون رویارویی صریح با $e$ انجام دهیم. در اینجا چند مسئله با ظاهری معمولی را می‌آزماییم که در آن‌ها عدد $e$ به‌طور غیرمنتظره ظاهر می‌شود و به ما نگاهی اجمالی از جهانی بودن $e$ می‌دهد.

همانند عدد $\pi$ و دیگر اعداد متعالی، عدد $e$ دارای نمایش اعشاری نامتناهی است؛ یعنی ارقام آن تا ابد بدون هیچ الگوی قابل تشخیصی ادامه پیدا می‌کند. با این وجود ۱۵ رقم اول عدد $e$، الگویی منظم دارد و به‌آسانی با گروه‌بندی مقابل به خاطر سپرده می‌شود: ۴۵ ۹۰ ۴۵ ۱۸۲۸ ۱۸۲۸ ۲.۷ این نظم قطعاً تصادفی است، باقی ارقام همان‌طور که انتظار می‌رود کاملاً تصادفی هستند، اما عدد $e$ چندین مشخصات حیرت‌انگیز دیگر دارد که آن را بین سایر اعداد منحصربه‌فرد می‌کند. شما با برخی از این مشخصات در این سری از مسائل آشنا خواهید شد. عدد $e$ به‌طور

طبیعی در تمام آن‌ها ظاهر می‌شود، اما حتی اگر شما دلیل ظاهر شدن $e$ را به‌طور سربسته بدانید، باز هم لذت‌بخش خواهد بود. جزئیات دقیق این دیدار متعالی به آموزش‌های ریاضی نیاز دارد. ببینیم چه کسی می‌تواند به ساده‌ترین روش ممکن این ارتباط را توضیح دهد.

### مسئله ۱. افراز کردن

بیایید یک عدد را انتخاب کنیم، مثلاً ۱۰. آن عدد را به قطعات مساوی تقسیم کنید مثل دوتا ۵ و آن‌ها در هم ضرب کنید: ۲۵ = ۵ × ۵.
حال می‌توانیم ۱۰ را به سه، چهار، پنج یا شش قطعهٔ مساوی تقسیم کنیم و همان کار را انجام دهیم. نتیجه به‌شکل زیر خواهد شد:
۲ قسمت: ۲۵ = ۵ × ۵
۳ قسمت: ۳۷.۰۴ = ۳.۳۳ × ۳.۳۳ × ۳.۳۳
۴ قسمت: ۳۹.۰۶ = ۲.۵ × ۲.۵ × ۲.۵ × ۲.۵
۵ قسمت: ۳۲ = ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲
۶ قسمت: ۲۱.۴۳ = ۱.۶۷ × ۱.۶۷ × ۱.۶۷ × ۱.۶۷ × ۱.۶۷ × ۱.۶۷
می‌بینید که حاصل‌ضرب افزایش می‌یابد و به مقداری می‌رسد که به نظر بیشترین مقدار است، سپس شروع به کاهش می‌کند. سعی کنید با اعداد دیگری مانند ۲۰ و ۳۰ نیز این کار را انجام دهید. متوجه خواهید شد که اتفاقی یکسان در هر حالت رخ می‌دهد. این اتفاق هیچ ارتباطی با خود اعداد ندارد بلکه به‌دلیل خاصیت منحصربه‌فرد $e$ است.

**الف)** آیا متوجه می‌شوید که چه زمانی حاصل‌ضرب به بیشترین مقدار خود به‌ازای عدد داده‌شده می‌رسد و چه ارتباطی با عدد $e$ دارد؟
اگر در پیدا کردن پاسخ درمانده‌اید، راهنمایی زیر را بخوانید.
راهنمایی: حاصل‌ضرب زمانی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که مقدار قطعات به $e$ نزدیک‌تر باشد.

**ب)** برای عدد ۱۰، بیشترین حاصل‌ضرب (۳۹.۰۶) تقریباً ۵.۵٪ بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین عدد بعدی است (۳۷.۰۴). بدون محاسبهٔ مقدار دقیق اختلاف، می‌توانید حدس بزنید که کدام عدد کوچک‌تر از ۱۰۰، کمترین درصد اختلاف را بین بیشترین حاصل‌ضرب و بزرگ‌ترین عدد بعدی دارد؟ چرا این اتفاق می‌افتد؟

**ج)** می‌توانید توضیح دهید که چرا $e$ در این مسئلهٔ ظاهراً کوچک به وجود آمده است؟

### مسئله ۲. اتحاد و یگانگی

وارث دارایی میلیاردی مجردی دچار مشکل بزرگی شده است. براساس شرایط وراثت، او باید در ۲۱ هفته ازدواج کند یا از این ارث محروم شود. علی‌رغم ضرب‌الاجل کوتاهی که برای او در نظر گرفته شده است، او مصمم است که بهترین شریک عاطفی را انتخاب کند، پس به برنامه‌ای مربوط به ازدواج با نام e-marriage می‌پیوندد. این برنامه به‌صورت زیر عمل می‌کند:
الگوریتم اختصاصی برنامه، بلافاصله و پس از آن هر دو هفته یک بار، شما را با یک شریک زندگی جفت می‌کند که بیشترین سازگاری را با شما دارد. در آن دو هفته، شما باید با آن کاندید ملاقات کنید، با یکدیگر آشنا شوید و او را رد کنید یا بپذیرید. کاندیدی که یک بار رد شود دیگر قابل فراخواندن نیست.
وارث می‌تواند ۱۰ شریک عاطفی با بیشترین هماهنگی را در ۲۰ هفته ملاقات کند و در آخرین هفته قبل از مهلت مقرر، ازدواج کند. اما او همچنان می‌خواهد بیشترین شانس را در انتخاب بهترین شریک عاطفی داشته باشد. پس همان‌طور که با کاندیدها آشنا می‌شود، آن‌ها را رتبه‌بندی می‌کند. مشکل اینجاست که او نمی‌تواند کاندیدهایی را که هنوز ندیده است، رتبه‌بندی کند. اگر او کاندیدی را زودتر بپذیرد، ممکن است فرصت انتخاب کاندیدی بهتر را از دست بدهد. اگر او زمان زیادی صبر کند، ممکن است قبلاً بهترین را رد کرده باشد.

**الف)** چگونه وارث می‌تواند شانس خود را برای انتخاب بهترین کاندید، با فرض عدم وجود رابطه، به حداکثر برساند؟

**ب)** اگر ۱۰ درصد احتمال رابطه با نفر اول وجود داشته باشد، شانس وارث چگونه تغییر می‌کند؟

**ج)** این یک مسئلهٔ کلاسیک است که پاسخ آن به $e$ مربوط است. آیا می‌توانید توضیح دهید که $e$ چگونه وارد صحنه می‌شود؟

درحالی‌که این مسئلهٔ کلاسیک بر بیشینه شدن شانس انتخاب بهترین شریک عاطفی تمرکز دارد، حتی $e$ نمی‌تواند سعادت متعالی را تضمین کند، چراکه اگر بهترین کاندید زودتر ظاهر و رد شود، ممکن است وارث در انتهای هفتهٔ ۲۰اُم با فردی که رتبهٔ پایین‌تری به دست آورده، گیر کند. اگر هدف، انتخاب یکی از بهترین کاندیدها باشد، ولی نه لزوماً بهترین آن‌ها، آن‌گاه روش عملی‌تری لازم است. اگر فرض کنیم که ۱۰ کاندید از ۱ تا ۱۰ رتبه‌بندی شده‌اند که ۱ به‌عنوان بهترین رتبه است، به‌دنبال راهی هستیم که مثلاً یکی از سه یا چهار نفر برتر را انتخاب کنیم.

**د)** در این سناریوی عملی‌تر، وارث چگونه می‌تواند بالاترین رتبهٔ مورد انتظار از کاندید انتخابی خود را به دست آورد؟

### مسئله ۳. با هم بودن

بیایید فرض کنیم که مأموریت وارث موفقیت‌آمیز بوده است و او علاوه‌بر ازدواجی سعادتمند، ثروتی کلان به ارث برده است. این زوج خوشبخت تصمیم می‌گیرند به استراحتگاهی بروند که در آنجا یک کنسرت اختصاصی در یک سالن بزرگ برنامه‌ریزی شده است. خدمات تالار براساس ترتیب ورود ارائه می‌شود و حضار را زوج‌ها تشکیل می‌دهند. هنگامی که یک زوج وارد سالن می‌شوند، به‌طور تصادفی یک جفت صندلی در کنار یکدیگر انتخاب می‌کنند. هر زوج جدید همین کار را انجام خواهد داد و در بسیاری موارد این موضوع باعث می‌شود که صندلی‌های تکی بین صندلی زوج‌ها خالی بماند. این فرایند تا زمانی ادامه دارد که تنها صندلی‌های تکی باقی بمانند. سپس سالن پر اعلام می‌شود و نمایش شروع خواهد شد.

**الف)** زمانی که سالن پر اعلام می‌شود، انتظار می‌رود چه نسبتی از صندلی‌ها خالی مانده باشد؟

**ب)** عدد $e$ چطور به این نمایشِ با هم بودن وارد می‌شود؟

سلسلهٔ متعالی ما تمام شد. امیدوارم که از حل این مسائل لذت ببرید و شاید چیزی راجع به عدد شگفت‌انگیز $e$ یاد بگیرید که قبلاً نمی‌دانستید. در مسلسل بعدی نشریهٔ بی‌نهایت می‌توانید پاسخ این مسائل را ببینید.
آرزومندیم که در مراقبه‌های متعالی خود، $e$-هم‌آهنگی داشته باشید!

**مرجع:**

https://www.quantamagazine.org/where-transcendental-numbers-hide-in-everyday-math%2020211027

---

۱ transcendental
۲ Charles Hermite
۳ Joseph Liouville

# یکی از کوتاه‌ترین مقاله‌های چاپ‌شده!

## اثباتی یک‌جمله‌ای که هر عدد اول $p \overset{4}{\equiv} 1$، مجموع دو مربع کامل است

تابع خودمعکوس با ضابطهٔ زیر روی مجموعهٔ متناهی $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{N}^۳ : x^۲ + ۴yz = p\}$ دقیقاً دارای یک نقطهٔ ثابت است:

$$(x,y,z) \mapsto \begin{cases} (x+۲z, z, y-x-z) & x < y-z \\ (۲y-x, y, x-y+z) & y-z < x < ۲y \\ (x-۲y, x-y+z, y) & x > ۲y \end{cases}$$

پس $|S|$ فرد است و تابع خودمعکوس $(x,y,z) \mapsto (x,z,y)$ نیز دارای یک نقطهٔ ثابت است.■

این اثبات به نوبهٔ خود از اثباتی ارائه‌شده توسط لیوویل الهام گرفته شده است. تأیید ادعاهای ضمنی مانند متناهی بودن مجموعهٔ $S$، خوش‌تعریف و خودمعکوس بودن نگاشت‌ها (یعنی وارونش با خودش برابر است) و دارا بودن دقیقاً یک نقطهٔ ثابت، بدیهی هستند و به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شوند. تنها برای مورد آخر نیاز است که عدد $p$ اولی به‌فرم $۴k + ۱$ باشد و در این صورت نقطهٔ ثابت به‌صورت $(۱,۱,k)$ خواهد بود.

توجه کنید که این اثبات سازنده نیست: روشی برای یافتن نمایشی از $p$ به‌صورت مجموع دو مربع کامل ارائه نمی‌دهد. پدیدهٔ مشابهی دربارهٔ نتایجی در توپولوژی و آنالیز نیز زمانی که با استفاده از قضیه نقطهٔ ثابت شده‌اند، رخ می‌دهد. درحقیقت، اصل بنیادی که استفاده کردیم: «تعداد اعضای یک مجموعهٔ متناهی و مجموعهٔ نقاط ثابت آن تحت هر خودمعکوس، دارای زوجیت یکسانی است» مشابه ترکیبیاتی و حالت خاصی از نتیجهٔ توپولوژیک متناظر است: «مشخصهٔ اویلر یک فضای توپولوژیک و مجموعهٔ نقاط ثابت آن تحت هر خودمعکوس پیوسته دارای زوجیت یکسانی است».

**مرجع:**

Don Zagier, A one-sentence proof that every prime p ≡ 1 mod 4 is a sum of two squares. Amer. Math. Monthly 97 (1990), no. 2, 144.

می‌توانید ادعاهای ارائه‌شده در این اثبات را تأیید کنید؟ تا مسلسل بعدی بی‌نهایت به آن فکر کنید و با ما همراه باشید 😉